Descriptif de ma thèse :
« Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible »

David A. Madore

Le mémoire est disponible sur thèses-en-ligne à l'adresse suivante : `http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/98/87/` — *ou bien sur* `http://www.dma.ens.fr/~madore/thesis.pdf`

1 Composition du jury

La thèse a été soutenue le 8 avril 2005 à Orsay (département de mathématiques de l'Université de Paris-Sud XI) devant la commission d'examen :

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE	Directeur de thèse
Olivier DEBARRE	Président
David HARARI	Examinateur
Brendan HASSETT	Rapporteur
Laurent MORET-BAILLY	Rapporteur

L'université délivrant le diplôme est l'Université de Paris-Sud XI.
Mention obtenue : très honorable.

2 Résumé court

Cette thèse présente quelques résultats portant sur l'arithmétique de variétés rationnellement connexes et, plus spécifiquement, des hypersurfaces cubiques, dans trois directions principales : l'équivalence rationnelle, la R-équivalence, et l'approximation faible. Dans la première partie, on décrit de façon explicite la spécialisation de la R-équivalence. La seconde est consacrée à la nullité du groupe de Chow de 0-cycles de degré 0 sur une hypersurface

cubique ayant bonne réduction sur les p-adiques. La troisième montre un résultat d'approximation faible aux places de bonne réduction sur les surfaces cubiques sur les corps de fonctions. La quatrième montre la R-trivialité des hypersurfaces cubiques de grande dimension sur les p-adiques. La cinquième partie explicite par un calcul la non-nullité du groupe de Chow de 0-cycles de degré 0 d'une hypersurface cubique de dimension 3 sur un corps de dimension 2. Enfin, on étudie la R-équivalence très libre sur les variétés toriques.

* * *

This thesis presents some results concerning the arithmetic of rationally connected varieties and, more specifically, cubic hypersurfaces, in three main directions: rational equivalence, R-equivalence, and weak approximation. In the first part, we describe explicitly the specialization of R-equivalence. The second part deals with the vanishing of the Chow group of 0-cycles of degree 0 on a cubic hypersurface having good reduction over the p-adics. The third shows a result of weak approximation at places of good reduction for cubic surfaces over function fields. The fourth shows the R-triviality of cubic hypersurfaces of large dimension over the p-adics. The fifth part shows, by an explicit computation, the non-vanishing of the Chow group of 0-cycles of degree 0 of a certain cubic hypersurface of dimension 3 over a field of dimension 2. Finally, we study very free R-equivalence on toric varieties.

3 Résumé long

Ce travail porte sur quelques résultats concernant l'arithmétique de certaines variétés rationnellement connexes et, plus spécifiquement, des hypersurfaces cubiques, dans trois directions principales : la R-équivalence, l'équivalence rationnelle, et l'approximation faible. La présentation suivante des grandes partie du mémoire est tirée de l'introduction de ce dernier :

3.1 Spécialisation de la R-équivalence

Si K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète A de corps résiduel k, et $\mathscr{X}$ une variété projective sur A, de fibre générique $X = \mathscr{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} K$ et de fibre spéciale $Y = \mathscr{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} k$, on a $X(K) = \mathscr{X}(A)$ et on dispose d'une flèche de réduction $X(K) \to Y(k)$, qui sert de façon essentielle pour analyser l'arithmétique de X sur K. Il résulte facilement de la théorie de l'intersection sur les cycles qu'on a une flèche de spécialisation (compatible au degré) sur les zéro-cycles, $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(Y)$ (définie par la flèche de Gysin $i^*\colon \mathrm{CH}_1(\mathscr{X}) \to \mathrm{CH}_0(Y)$, où $i\colon Y \to \mathscr{X}$ est l'immersion fermée de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$). Le fait que la flèche $X(K) \to Y(k)$ passe à la R-équivalence (et définisse une flèche $X(K)/R \to Y(k)/R$), doit sans doute être considéré comme connu, mais aucune référence ne semble disponible (bien que des faits apparentés soient dans la littérature) : c'est donc l'objet de cette première partie, qui explique comment décrire explicitement (en termes de coordonnées projectives) la façon dont se spécialise la R-équivalence.

À titre d'exemple, ceci fournit une démonstration facile du fait qu'une spécialisation d'une variété (projective lisse) rationnellement connexe est rationnellement connexe par chaînes.

La question se pose ensuite de savoir ce qu'on peut dire (injectivité, surjectivité) de la flèche $X(K)/R \to Y(k)/R$ ou bien $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(Y)$ (la réponse complète à cette question dans le cas de bonne réduction a été apportée récemment par Kollár.

3.2 Équivalence rationnelle sur les corps p-adiques

Si X est une hypersurface cubique lisse ayant bonne réduction (c'est-à-dire ayant un modèle projectif dont la fibre spéciale Y est une hypersurface cubique lisse) sur un corps p-adique (avec $p \geq 5$), la nullité du groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro $\mathrm{CH}_0^0(Y)$ de la fibre spéciale était connue ; il s'agit donc d'un des premiers cas où la question se pose de façon intéressante de savoir si on peut montrer $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ par déformation depuis la fibre spéciale. C'est ce qui est fait dans cette partie. Le résultat porte sur l'équivalence rationnelle, mais l'essentiel des arguments travaillent sur la R-équivalence : le point de départ est un résultat de Swinnerton-Dyer qui affirme que toute surface cubique lisse sur un corps fini est R-triviale, résultat duquel Swinnerton-Dyer avait lui-même déduit le même énoncé sur les corps p-adiques dans le cas d'une *surface* cubique (lisse de bonne réduction).

L'idée originale de notre démonstration consiste à obtenir une courbe très libre (cf. plus haut) sur la fibre spéciale, pour pouvoir ensuite la déformer. Malheureusement, pour obtenir l'existence de points dans un ouvert (correspondant aux courbes très libres) de l'espace affine, il a fallu passer par des corps « finis infinis », et, au final, on n'obtient la conclusion ($\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$) que sur l'équivalence rationnelle et non la R-équivalence.

Après ce résultat (publié dans *manuscripta mathematica*), Kollár et Szabó ont obtenu, également en déformant des courbes très libres pour passer de la fibre spéciale à la fibre générique, un résultat beaucoup plus général : si X est une variété projective lisse sur K corps local de corps résiduel k, dont on suppose la réduction Y à k lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe, on a $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$, et, si $\operatorname{card} k$ est assez grand (où « assez » ne dépend que de la dimension et du degré de X), X est R-triviale.

3.3 Approximation faible sur les surfaces cubiques

Si K est un corps global ou le corps des fonctions sur une courbe Γ sur un corps algébriquement clos et X une variété projective sur K telle que $X(K) \neq \varnothing$, on dira que X vérifie l'approximation faible en un ensemble fini S de places de K lorsque $X(K)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ où $\hat{K}_v$ est le complété de K en la place v, où on a muni $X(\hat{K}_v)$ de la topologie v-adique. Il s'agit de la question naturelle à se poser une fois acquise l'existence d'un point rationnel (et, si l'approximation faible n'est pas vérifiée, on peut chercher d'éventuelles obstructions cohomologiques pour l'expliquer).

Swinnerton-Dyer avait prouvé que pour X une surface cubique lisse sur un corps de nombres K, dès que $X(K) \neq \varnothing$, on a l'approximation faible en n'importe quel ensemble (fini) S de places de bonne réduction de X. Ici, en s'inspirant de cette démonstration, on obtient le résultat semblable pour les corps de fonctions ; il s'agit là du premier cas non trivial obtenu d'approximation faible sur les corps de fonctions.

Très récemment, Hassett et Tschinkel ont obtenu ce résultat pour toutes les variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes.

3.4 R-équivalence sur les hypersurfaces cubiques en grande dimension

Dans les cas de mauvaise réduction, sur un corps local, il est difficile d'utiliser des techniques de déformation depuis la fibre spéciale pour obtenir des résultats sur la fibre générique comme décrites ci-dessus. Néanmoins, on peut penser que si le nombre de variables est suffisamment grand, les propriétés seront bonnes. Le résultat ici est[1] : si X est une hypersurface

[1]La même démonstration donne d'ailleurs facilement la R-trivialité d'une hypersurface cubique de dimension au moins 4 sur un corps C_1 ; on peut se demander si ce fait est vrai

cubique de dimension au moins 10 sur un corps p-adique (ou sur un corps C_2), alors X est R-triviale, et $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$.

On ignore à partir de quelle dimension il est vrai que $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ pour toute hypersurface cubique lisse sur un corps p-adique k. En dimension 2 le problème est bien maîtrisé car alors $\mathrm{CH}_0^0(X)$ se plonge dans $H^1(k, S)$ où S est le tore dont le réseau des caractères (avec action de Galois) est $S^* = \mathrm{Pic}\,\bar{X}$. La dualité parfaite $H^1(k, S) \times H^1(k, S^*) \to \mathrm{Br}\,k = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (donnée par la théorie locale du corps de classes) correspond à l'évaluation (non dégénérée à gauche) $\mathrm{CH}_0^0(X) \times \mathrm{Br}\,X \to \mathrm{Br}\,k$ (ici, $\mathrm{Br}\,X = H^2(X, \mathbb{G}_m)$ désigne le groupe de Brauer chomologique. C'est-à-dire qu'en particulier l'évaluation des éléments du groupe de Brauer de X détecte exactement l'équivalence rationnelle. On peut mentionner l'exemple classique de la surface cubique définie par l'équation $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + pT_3^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}_p}$ avec $p \equiv 2 \pmod 3$ et $p \geq 5$, sur laquelle les deux points $\mathbb{Q}_p$-rationnels $(1 : -1 : 0 : 0)$ et $(\sqrt[3]{2} : -1 : -1 : 0)$ ne sont pas rationnellement équivalents (en fait, $\mathrm{CH}_0^0(X) \cong E(\mathbb{F}_p)/3E(\mathbb{F}_p)$, où E est la courbe elliptique $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 = 0$, la flèche étant donné par la spécialisation). En dimension supérieure ou égale à 3, l'obstruction présentée par le groupe de Brauer tombe pour une hypersurface car alors $\mathrm{Br}\,X = \mathrm{Br}\,k$.

3.5 Non trivialité d'un groupe de Chow

La partie suivante montre que, bien que le groupe de Brauer ne donne dans ce cas pas d'obstruction (comme expliqué ci-dessus), on peut avoir $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$ pour une hypersurface cubique lisse de dimension 3 sur un corps de dimension cohomologique 2 (en l'occurrence $\mathbb{C}(\!(u)\!)(\!(v)\!)$, l'hypersurface étant donnée par $T_0^3 + T_1^3 + uT_2^3 + vT_3^3 + uvT_4^3 = 0$). Malheureusement, il n'a pas semblé possible de construire un exemple analogue sur $\mathbb{Q}_p$ (bien qu'il semble plausible qu'il existe effectivement des hypersurfaces cubiques lisses sur $\mathbb{Q}_p$ avec $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$).

La méthode de calcul consiste à obtenir un modèle régulier explicite et à considérer la matrice d'intersection des 1-cycles de la fibre spéciale de celui-ci avec des composantes de la fibre spéciale. Le calcul du modèle régulier se fait par des résolutions toroïdales, comme il a été suggéré par P. Deligne.

en toute dimension ≥ 2, ce qui n'est pas le cas pour un corps C_2.

3.6 R-équivalence très libre sur les tores

En appendice, nous plaçons un résultat qui ne concerne pas les hypersurfaces cubiques : il est prouvé que sur une variété torique projective lisse sur un corps infini, deux points rationnellement équivalents sont directement reliés (R-équivalents) par une courbe très libre. On obtient également le résultat sur une surface de Del Pezzo de degré 5 : deux points quelconques sont directement reliés par une courbe très libre. Ces deux faits s'obtiennent en étudiant le torseur universel au-dessus des variétés considérées, et se placent dans la continuité de certaines remarques faites dans des travaux de Colliot-Thélène et Sansuc.