MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
COURS 2-16 "MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS"

6 Décembre 2013 — Examen (1)

Livres et ordinateurs interdits — Notes de cours et notes personnelles autorisées

I. Exercices sur les relations rationnelles

Dans ce qui suit, A et B sont deux alphabets satisfaisant $\mathsf{Card}(A) \geq 2$ et $\mathsf{Card}(B) \geq 1$ sauf mention explicite du contraire.

1 .— Rappeler, en donnant un exemple, que l'intersection de deux relations R et S dans $\mathrm{Rat}\, A^* \times B^*$ n'est pas nécessairement rationnelle.

2 .— Montrer, toujours en donnant un exemple, que l'intersection d'une relation binaire rationnelle et d'une relation binaire synchrone sur $A^* \times B^*$ n'est pas nécessairement rationnelle.

3 .— On appelle *substitution rationnelle* toute application $\sigma : A \to \mathrm{Rat}\, B^*$. Cette application σ définit une application de A^* dans $\mathrm{Rat}\, B^*$ qui en est l'extension par morphisme et qu'on note encore σ; c'est-à-dire que si $u = a_1 \cdots a_n$ est un mot de A^*, avec les a_i dans A, alors $\sigma(u) = \sigma(a_1) \cdots \sigma(a_n)$ (produit de concaténation) et l'image par σ du mot vide de A^* est le mot vide de B^*. Cette application est étendue aux sous-ensembles $X \subseteq A^*$ en posant $\sigma(X) = \bigcup_{u \in X} \sigma(u)$.

Montrer que si X est une partie rationnelle de A^* alors la relation

$$R = \{(u, v) \mid u \in X, v \in \sigma(u)\} \tag{1}$$

est rationnelle.

4 .— Soit $R \subseteq A^* \times B^*$ une relation binaire rationnelle. Pour tout $u \in A^*$ on pose $R(u) = \{v \in B^* \mid (u, v) \in R\}$. Montrer que si $K \in \mathrm{Rat}\, B^*$, alors

$$X = \{u \in A^* \mid R(u) \cap K \neq \emptyset\} \qquad \text{et} \qquad Y = \{u \in A^* \mid R(u) \subseteq K\}$$

sont des parties rationnelles de A^*. Dire en quelques mots pourquoi ces parties sont en fait constructibles.

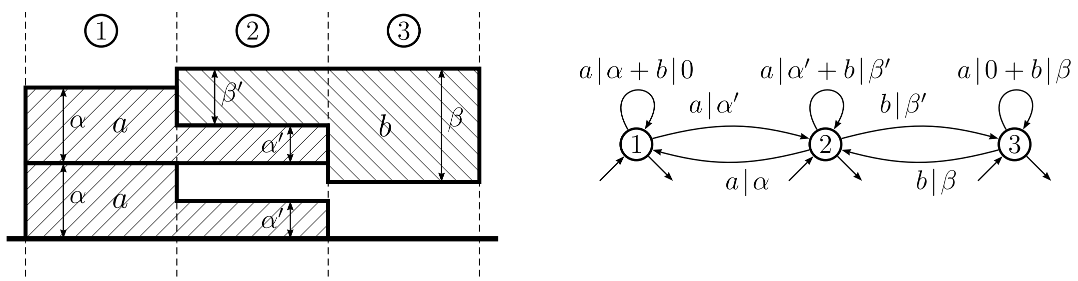
Montrer que si $A = \{a, b\}$ et si on remplace B^* par le monoïde $M = a^* \times a^*$ l'énoncé précédent n'est plus vrai.

II. Exercices sur les automates avec multiplicité

1 .— **Tetris.** Soit $\mathbb{M} = \langle\, \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}, \mathsf{max}, + \,\rangle$ le semi-anneau max-+ sur les réels positifs, auxquels on a adjoint l'élément $-\infty$.

On considère un “jeu de Tétris” simplifié, représenté à la figure 1.a. Il y a trois colonnes, et deux pièces distinctes: a et b; les pièces tombent verticalement, sans changer de colonnes, ni d'orientation. Une “partie” est donc entièrement décrite par un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$, et le résultat par la hauteur atteinte sur chacune des trois colonnes. La pièce a est à fond plat et entièrement déterminée par les deux hauteurs α et α' dans $\mathbb{R}_+$ (une valeur nulle correspond à une “plaque” d'épaisseur nulle mais qui est bel et bien présente). La pièce b a la face supérieure plate et est entièrement déterminée par les deux hauteurs β et β' dans $\mathbb{R}_+$.

Expliquer comment le comportement de ce jeu est modélisé par le $\mathbb{M}$-automate $\mathcal{T}$ représenté à la figure 1.b.



(a) Le jeu ...

(b) ... et l'automate $\mathcal{T}$

Figure 1: Tétris simplifié et son modèle

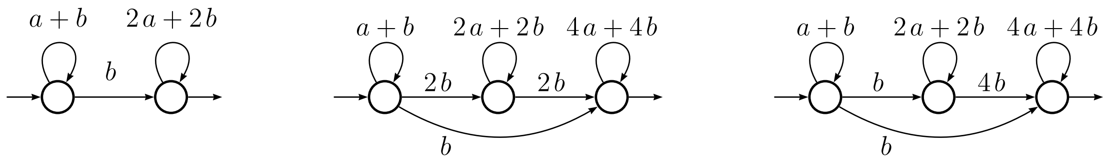
2 .— Le $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{C}_1$ sur $\{a, b\}^*$ de la figure 4.a associe à chaque mot w l'entier $\overline{w}$ dont la représentation en base 2 est w quand on remplace a par le chiffre 0 et b par 1.

Le $\mathbb{N}$-automate $\mathcal{C}_2$, carré de Hadamard de $\mathcal{C}_1$: $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \odot \mathcal{C}_1$, a pour quotient minimal $\mathcal{V}_2$ représenté à la figure 4.b et pour co-quotient minimal $\mathcal{V}'_2$ représenté à la figure 4.c.

(a) Calculer le quotient minimal $\mathcal{V}_3$ et le co-quotient minimal $\mathcal{V}'_3$ de $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \odot \mathcal{C}_1$.

(b) Calculer le co-quotient minimal $\mathcal{V}'_4$ de $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3 \odot \mathcal{C}_1$. Comparer avec $\mathcal{V}'_3$.[1]

[1] L'énoncé donné à l'examen demandait de comparer avec $\mathcal{V}_3$ ce qui n'a évidemment pas grand sens.



(a) $\mathcal{C}_1$ (b) $\mathcal{V}_2$ (c) $\mathcal{V}'_2$

Figure 2: Trois $\mathbb{N}$-automates

(c) En vous inspirant du calcul précédent, et en vous appuyant sur le calcul du comportement de $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \odot \mathcal{C}_1$, calculer le co-quotient minimal $\mathcal{V}'_{n+1}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$ pour tout n.

3 .— Construire le revêtement de Schützenberger $\mathcal{S}$ de l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessous.

Combien y a-t-il de S-immersions distinctes dans ce revêtement (c'est-à-dire, de sous-automates $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ distincts qui sont à la fois non-ambigus et équivalents à $\mathcal{A}$)?

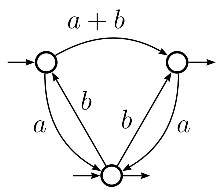


Figure 3: L'automate $\mathcal{A}$