

Leçon 5

Transducteurs « temps-réel »

Dans cette leçon, on va adopter un point de vue sur les transducteurs qui rompt complètement avec la symétrie entre la première et la deuxième composante des étiquettes des transitions, entre l'*entrée* et la *sortie*. Ces transducteurs d'un nouveau genre pourront être vu comme des automates sur un monoïde libre, donc chaque transition est étiquetée par une lettre, qui sera l'entrée, accompagnée d'un *poïds*, qui sera la sortie.

Cette transformation se développe naturellement à l'aide d'un nouvel outil mathématique pour la description des automates : la réalisation par représentation matricielle. Les théorèmes d'évaluation et de composition en seront transformés. Mais surtout, ce point de vue ouvre la voie à la définition et à l'étude de nouvelles classes de relations : les relations séquentielles et les relations fonctionnelles qui seront les sujets des leçons suivantes.

Contents

5.1	Représentation matricielle des automates finis	50
5.1.1	Définition	50
5.1.2	Parties reconnaissables d'un monoïde	51
5.1.3	Aperçu sur les automates avec multiplicité	51
5.2	Transducteurs temps-réel et représentations	52
5.2.1	Définitions	52
5.2.2	Réalisation des relations rationnelles	53
5.2.3	Réalisation par représentations	55
5.3	Théorèmes d'évaluation et de composition	56
5.4	Uniformisation des relations rationnelles	56
5.5	Exercices	57

5.1 Représentation matricielle des automates finis

5.1.1 Définition

Définition 1. Soit $\mathcal{A} = \langle A, Q, I, E, T \rangle$ un automate fini sur A^* . La représentation matricielle de \mathcal{A} est le triplet $\langle \lambda, \mu, \nu \rangle$ où μ est le morphisme $\mu: A^* \rightarrow \mathbb{B}^{Q \times Q}$ défini par :

$$\forall a \in A, \forall p, q \in Q \quad \mu(a)_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p, a, q) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où λ et ν sont les vecteurs booléens de dimension Q , respectivement vecteur-ligne et vecteur-colonne, définis par :

$$\forall p, q \in Q \quad \lambda_q = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in I \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \nu_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite nous ne distinguerons plus entre un sous-ensemble I de Q et le vecteur booléen qui le représente, et nous les noterons I tous les deux. Le fait de savoir si le vecteur est *ligne* ou *colonne* dépendra du contexte. On notera donc $\langle I, \mu, T \rangle$ la représentation matricielle de \mathcal{A} .

Exemple 2. La représentation matricielle de l'automate \mathcal{A}_1 montré à la figure 1 est $\langle I_1, \mu_1, T_1 \rangle$ avec

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_1(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

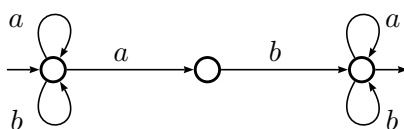


FIG. 1 – L'automate \mathcal{A}_1

On établit aisément, par récurrence sur la longueur de w , que l'on a :

Proposition 3. $L(\mathcal{A}) = \{w \in A^* \mid I \cdot \mu(w) \cdot T = 1\}$. ■

D'où l'on déduit

Proposition 4. Soient \mathcal{A} un automate fini sur A^* et $\langle I, \mu, T \rangle$ sa représentation. ■

$$\forall w \in A^* \quad \mu(w)_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \xrightarrow[w]{\mathcal{A}} q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.1.2 Parties reconnaissables d'un monoïde

Définition 5. Soient M et N deux monoïdes, $P \subseteq M$, et $\alpha: M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes.

- P est reconnue par α si $P = \alpha^{-1}(\alpha(P))$,
c'est-à-dire si $\exists R \subseteq N \quad P = \alpha^{-1}(R)$,
c'est-à-dire si P est saturée par l'équivalence d'application de α .
- P est reconnue par N si il existe un morphisme $\alpha: M \rightarrow N$ tel que P est reconnue par α .
- P est reconnaissable si P est reconnue par un monoïde fini.

On note $\text{Rec } M$ la famille des parties reconnaissables de M .

On vérifie aisément que $\text{Rec } M$ est une algèbre de Boole de parties de M .

Théorème 6. Si l'alphabet A est fini, $\text{Rat } A^* = \text{Rec } A^*$.

L'exemple de l'automate de la figure 2, automate sur le monoïde $\{a\}^* \times \{b\}^* = \mathbb{N}^2$ montre que la construction qui établit le Théorème 6 n'est plus valide dans le cas d'un monoïde non libre. À partir de cet automate, on peut définir une application $\psi: \{a\}^* \times \{b\}^* \rightarrow \mathbb{B}^{3 \times 3}$ par

$$\psi((a, 1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x \quad \text{et} \quad \psi((1, b)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = y .$$

Mais ψ ne définit pas un morphisme de $\{a\}^* \times \{b\}^*$ dans $\mathbb{B}^{3 \times 3}$ puisque $xy \neq yx$ et qu'il faudrait avoir l'égalité pour que ψ soit un morphisme puisque $(a, b) = (a, 1)(1, b) = (1, b)(a, 1)$.

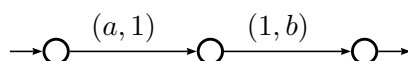


FIG. 2 – Un automate sur \mathbb{N}^2

Le cas des produits directs des monoïdes libres (qui est central pour notre propos) permet néanmoins d'énoncer une caractérisation des parties reconnaissables :

Proposition 7. Une partie P de $A^* \times B^*$ est reconnaissable si, et seulement si, il existe un ensemble fini I et, pour chaque i de I , un langage R_i dans $\text{Rat } A^*$ et un langage S_i dans $\text{Rat } B^*$ tels que :

$$P = \bigcup_{i \in I} R_i \times S_i .$$

5.1.3 Aperçu sur les automates avec multiplicité

On vérifie que si dans la définition 1 on considère que le morphisme μ est à valeur dans $\mathbb{N}^{Q \times Q}$, c'est-à-dire que les 0 et 1 sont vus comme des entiers et non pas comme

des éléments de \mathbb{B} , et que, de même, I est un vecteur de $\mathbb{N}^{1 \times Q}$ et T de $\mathbb{N}^{Q \times 1}$, alors, pour tout w dans A^* ,

$$I \cdot \mu(w) \cdot T$$

est le *nombre de calculs réussis* dans \mathcal{A} qui ont w pour étiquette, c'est-à-dire qu'on transforme ainsi l'automate \mathcal{A} en un dispositif qui à chaque mot w n'associe plus une réponse binaire: *accepté/pas accepté*, mais une *information quantitative*.

Ce résultat ouvre la voie à toute la théorie des *automates avec multiplicité* qui ne sera pas traitée dans ce cours, mais qui est d'une certaine façon sous-jacente au point de vue adopté dans cette leçon sur les transducteurs.

5.2 Transducteurs temps-réel et représentations

On définit un nouveau modèle de transducteur, qui permettra de définir de façon naturelle une représentation matricielle pour des automates qui vont réaliser les relations rationnelles.¹

5.2.1 Définitions

La définition des transducteurs temps-réel que nous avons en vue requiert d'abord une légère modification de la définition d'automates ou, plus précisément, de celle d'état initial ou final: on remplace cette notion par celle de *fonction initiale ou finale*. Dans un automate « classique » $\mathcal{A} = \langle A, Q, I, E, T \rangle$, $I \subseteq Q$ et $T \subseteq Q$ deviennent des fonctions $I: Q \rightarrow \mathfrak{P}(A^*)$ et $T: Q \rightarrow \mathfrak{P}(A^*)$ définies par:

$$I(q) = \begin{cases} 1_{A^*} & \text{si } q \text{ est un état initial} \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases} \quad T(p) = \begin{cases} 1_{A^*} & \text{si } p \text{ est un état final} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

La définition de l'étiquette d'un calcul est accordée pour prendre en compte ce changement de telle sorte que le langage accepté par l'automate, son comportement, n'est en rien modifié.

Définition 8. Un transducteur temps-réel sur $A^* \times B^*$, $\mathcal{T} = \langle A^* \times B^*, Q, I, E, T \rangle$, est un automate dont les transitions sont étiquetées par des éléments de $A \times \mathfrak{P}(B^*)$ et dont les fonctions initiales et finales sont à valeur dans $\mathfrak{P}(B^*)$, c'est-à-dire $E \subseteq Q \times A \times \mathfrak{P}(B^*) \times Q$ et $I, T: Q \rightarrow \mathfrak{P}(B^*)$.

Le transducteur \mathcal{T} est fini si E est fini, si chaque transition est étiquetée dans $A \times \text{Rat } B^*$ et si I et T sont à valeur dans $\text{Rat } B^*$.

Exemple 9. La figure 3 montre trois transducteurs temps-réel.

¹La terminologie: *transducteur « temps-réel »* n'est pas satisfaisante; elle est adoptée faute d'avoir trouvé mieux, traduction du terme employé en anglais: *realtime transducer*.

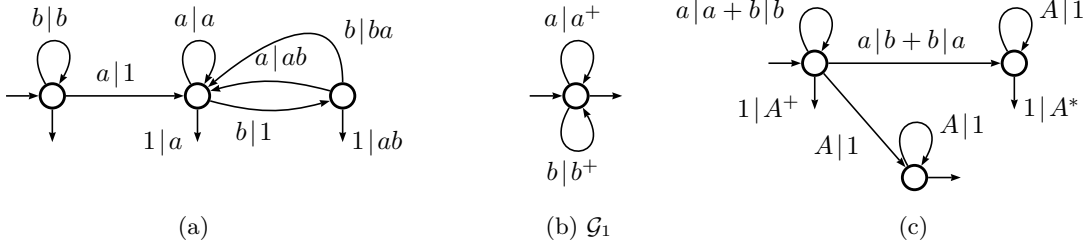


FIG. 3 – Trois transducteurs temps-réel

D'une façon générale, les transitions de \mathcal{T} sont donc de la forme :

$$p \xrightarrow[\mathcal{T}]{a|K_{a,p,q}} q \quad \text{avec} \quad a \in A, K_{a,p,q} \subseteq B^*,$$

d'où l'on déduit la forme des calculs de \mathcal{T} :

$$c = I(p_0) \xrightarrow{p_0} p_0 \xrightarrow{a_1|K_{a_1,p_0,p_1}} p_1 \xrightarrow{a_2|K_{a_2,p_1,p_2}} p_2 \cdots p_{n-1} \xrightarrow{a_n|K_{a_n,p_{n-1},p_n}} p_n \xrightarrow{T(p_n)},$$

et l'expression de leurs étiquettes :

$$|c| = (1_{A^*}, I(p_0)) (a_1, K_{a_1,p_0,p_1}) (a_2, K_{a_2,p_1,p_2}) \cdots (a_n, K_{a_n,p_{n-1},p_n}) (1_{A^*}, T(p_n)).$$

La relation $\theta: A^* \rightarrow B^*$ réalisée par \mathcal{T} est donc, pour tout $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ de A^* :

$$\theta(w) = \bigcup_{\substack{c \text{ calcul de } \mathcal{T} \\ \pi_{A^*}(|c|) = w}} I(p_0) K_{a_1,p_0,p_1} K_{a_2,p_1,p_2} \cdots K_{a_n,p_{n-1},p_n} T(p_n).$$

5.2.2 Réalisation des relations rationnelles

Théorème 10. *Une relation $\theta: A^* \rightarrow B^*$ est rationnelle si, et seulement si, elle est réalisée par un transducteur temps-réel fini.*

Démonstration. (i) La condition est suffisante. Soit \mathcal{T} un transducteur temps-réel fini. Si K est un rationnel de B^* accepté par \mathcal{A} (figure 4(a)), une transition $p \xrightarrow{a|K} q$ de \mathcal{T} (figure 4(b)) est remplacée par un ensemble de transitions étiquetées (figure 4(c)), les fonctions initiale et finale $I(q) = K$ et $T(p) = K$ par deux ensembles de transitions étiquetées (figure 4(d) et (e)).

On se convainc aisément que le transducteur obtenu de cette manière est équivalent au transducteur \mathcal{T} de départ. Cette construction fait apparaître des transitions spontanées, qu'on élimine ensuite avec l'algorithme classique et le résultat est un transducteur normalisé, toujours équivalent à \mathcal{T} . La figure 5 montre cette construction appliquée au transducteur \mathcal{G}_1 de la figure 3(b).

(ii) La condition est nécessaire. Soient $\theta: A^* \rightarrow B^*$ une relation rationnelle et \mathcal{T} un transducteur (sous-)normalisé qui réalise $\hat{\theta}$. On peut écrire \mathcal{T} sous forme

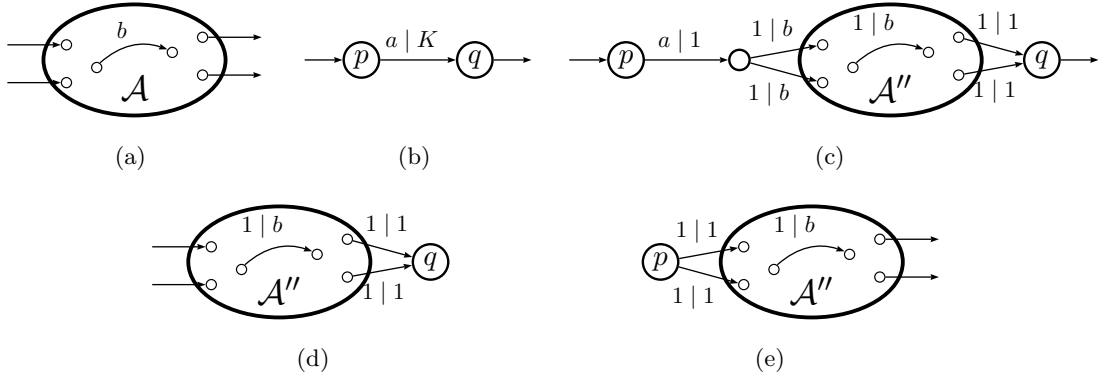


FIG. 4 – Transformation d’un transducteur temps-réel en transducteur normalisé

matricielle : $\mathcal{T} = \langle I, E, T \rangle$ où I et T sont des vecteurs booléens de dimension Q et où E est une matrice de dimension $Q \times Q$ à coefficients dans les sous-ensembles de $(A \times \{1_{B^*}\}) \cup (\{1_{A^*}\} \times B)$ — si \mathcal{T} est normalisé — ou de $(A \times \{1_{B^*}\}) \cup (\{1_{A^*}\} \times B) \cup (A \times B)$ — si \mathcal{T} est sous-normalisé. Dans tous les cas, on a :

$$\hat{\theta} = |\mathcal{T}| = I \cdot E^* \cdot T \quad (5.1)$$

Dans tous les cas également, on peut écrire

$$E = F + G \quad \text{avec} \quad G \in (\{1_{A^*}\} \times B)^{Q \times Q}$$

et $F \in (A \times \{1_{B^*}\})^{Q \times Q}$ ou $F \in ((A \times \{1_{B^*}\}) \cup (A \times B))^{Q \times Q}$ selon que \mathcal{T} est normalisé ou sous-normalisé. L’équation (5.1) devient :

$$|\mathcal{T}| = I \cdot E^* \cdot T = I \cdot (F + G)^* \cdot T = I \cdot (G^* \cdot F)^* \cdot G^* \cdot T = I \cdot G^* \cdot (F \cdot G^*)^* \cdot T \quad .$$

On y lit alors que \mathcal{T} est équivalent aux deux transducteurs \mathcal{T}' et \mathcal{T}'' avec :

$$\mathcal{T}' = \langle I, G^* \cdot F, G^* \cdot T \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{T}'' = \langle I \cdot G^*, F \cdot G^*, T \rangle \quad .$$

Les coefficients de G^* sont dans $(1_{A^*} \times \text{Rat } B^*)$, comme ceux de $G^* \cdot T$ et de $I \cdot G^*$; les coefficients de $G^* \cdot F$ comme ceux de $F \cdot G^*$ sont dans $(A \times \text{Rat } B^*)$: \mathcal{T}' et \mathcal{T}'' sont deux transducteurs temps-réel finis. L’Exemple 11 développe ces calculs pour le transducteur \mathcal{G}_2 . ■

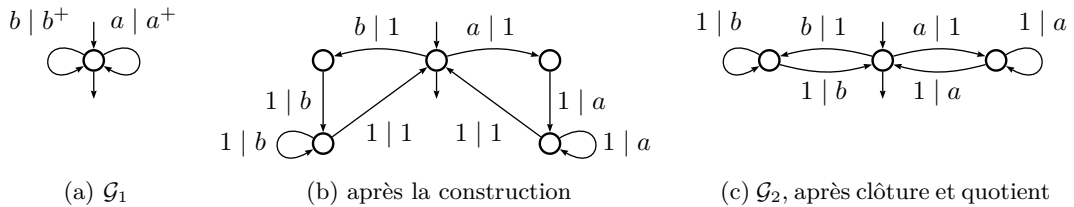


FIG. 5 – Un transducteur temps-réel transformé en transducteur normalisé

Exemple 11. La représentation matricielle de \mathcal{G}_2 est :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & (a,1) & (b,1) \\ (1,a) & (1,a) & 0 \\ (1,b) & 0 & (1,b) \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où le calcul :

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & (a,1) & (b,1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1,a) & (1,a) & 0 \\ (1,b) & 0 & (1,b) \end{pmatrix}, \quad G_2^* = \begin{pmatrix} (1,1) & 0 & 0 \\ (1,a^+) & (1,a^*) & 0 \\ (1,b^+) & 0 & (1,b^*) \end{pmatrix}.$$

Le transducteur $\mathcal{G}'_2 = \langle I_2, G_2^* \cdot F_2, G_2^* \cdot T_2 \rangle$ est représenté à la figure 6 et on observe que le transducteur $\mathcal{G}''_2 = \langle I_2 \cdot G_2^*, F_2 \cdot G_2^*, T_2 \rangle$ est égal à \mathcal{G}_1 .

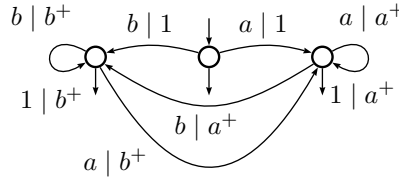


FIG. 6 – Le transducteur temps-réel \mathcal{G}'_2

5.2.3 Réalisation par représentations

Définition 12. Soient A^* et B^* deux monoïdes libres. Une représentation de A^* dans $\text{Rat } B^*$ de dimension Q est un triplet $\langle I, \mu, T \rangle$ où $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ est un morphisme (donc entièrement défini par les matrices $\mu(a)$ pour a dans A) et I et T sont des vecteurs, respectivement ligne et colonne, de $(\text{Rat } B^*)^Q$.

Théorème 13. Une relation $\theta: A^* \rightarrow B^*$ est rationnelle si, et seulement si, il existe une représentation de A^* dans $\text{Rat } B^*$ $\langle I, \mu, T \rangle$ qui réalise θ , c'est-à-dire telle que

$$\forall w \in A^* \quad \theta(w) = I \cdot \mu(w) \cdot T \quad .$$

Démonstration. Si $\mathcal{T} = \langle I, E, T \rangle$ est un transducteur temps-réel, la matrice E définit le morphisme $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ par

$$E = \sum_{a \in A} (a, 1) (1, \mu(a)) \quad (5.2)$$

c'est-à-dire

$$\forall a \in A, \forall p, q \in Q \quad \mu(a)_{p,q} = \begin{cases} K_{a,p,q} & \text{si } p \xrightarrow{a|K_{a,p,q}}_{\mathcal{T}} q \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

sous l'hypothèse, nécessaire pour l'écriture $\mathcal{T} = \langle I, E, T \rangle$, que pour chaque a dans A et chaque couple p, q dans Q , il y a au plus une seule transition dans \mathcal{T} qui va de p à q et dont la première composante est a .

Inversement, un morphisme $\mu: A^* \rightarrow (\text{Rat } B^*)^{Q \times Q}$ définit une matrice d'incidence d'un transducteur temps-réel fini par la même équation (5.2).

On vérifie ensuite, par récurrence sur la longueur des mots w , que :

$$\forall w \in A^*, \forall p, q \in Q \quad \mu(w)_{p,q} = L \iff L = \bigcup \left\{ H \mid p \xrightarrow[\mathcal{T}]{w|H} q \right\}$$

d'où l'on déduit que, pour tout w dans A^* , $\theta(w) = I \cdot \mu(w) \cdot T$. ■

Exemple 14. Les représentations des transducteurs temps-réel de l'Exemple 11 sont les suivantes :

$$(a) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & ab & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & ba & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ ab \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad I = (1), \quad \mu(a) = (a^+), \quad \mu(b) = (b^+), \quad T = (1);$$

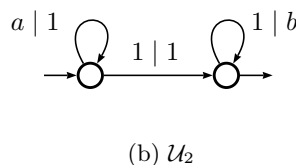
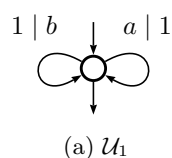
$$(c) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu(a) = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(b) = \begin{pmatrix} b & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} A^+ \\ A^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Théorèmes d'évaluation et de composition

5.4 Uniformisation des relations rationnelles

5.5 Exercices

1.— Appliquer la construction de la preuve du Théorème 13 pour obtenir des transducteurs temps-réel à partir des deux transducteurs qui réalisent la relation universelle sur $\{a\}^* \times \{b\}^*$.



2.— Donner une réalisation par représentation des relations suivantes :

(a) l'ordre lexicographique (c'est-à-dire la relation qui à un mot associe tous les mots plus grands dans l'ordre lexicographique); (b) l'ordre radiciel (*idem*).

3.— Soit $\varphi_1: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{x, y\}^*$ le morphisme défini par :

$$\varphi_1(a) = x, \quad \varphi_1(b) = yx, \quad \varphi_1(c) = xy.$$

Donner une représentation matricielle de la relation φ_1 , de la relation φ_1^{-1} .

4.— **Composantes finie et infinie d'une relation rationnelle.**

Soit $\tau: A^* \rightarrow B^*$ une relation. Les *composantes finie* τ_f et *infinie* τ_∞ de τ sont définies par :

$$\tau_f(w) = \begin{cases} \tau(w) & \text{si } \|\tau(w)\| \text{ est fini} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_\infty(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \|\tau(w)\| \text{ est fini} \\ \tau(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que si τ est rationnelle, τ_f et τ_∞ sont rationnelles et effectivement calculables à partir de τ .