C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 1065-1067, 1993

Probabilités/*Probability Theory*

Une inégalité d'interpolation sur l'espace de Wiener

Laurent DECREUSEFOND, Yaozhong HU et Ali Süleyman ÜSTÜNEL

Résumé – Dans cette Note nous démontrons une inégalité d'interpolation pour les normes L^p entre les espaces de Sobolev d'ordre 0 et 2 sur l'espace de Wiener.

An interpolation inequality on the Wiener space

Abstract – *In this Note we prove an interpolation inequality in* L^p*-norm between the Sobolev spaces of order* 0 *and* 2 *on the Wiener space.*

PRÉLIMINAIRES. – Soit (W, H, μ) l'espace de Wiener classique, c'est-à-dire

$$W = C_0([0, 1]),$$

H est le sous-espace de W formé des fonctions ayant une dérivée de carré intégrable sur [0, 1] et μ est la mesure de Wiener sous laquelle l'application $(t, w) \mapsto w(t)$ de $[0, 1] \times W$ dans $\mathbb{R}$, est un mouvement brownien standard. On notera par P_t le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur W, défini sur les polynômes par la formule de Mehler :

$$P_t \phi(w) = \int_W \phi(e^{-t} w + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y)\, \mu(dy).$$

Si on écrit ϕ suivant son développement en chaos de Wiener

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\phi_n),$$

alors $P_t \phi$ s'écrit comme

$$P_t \phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} I_n(\phi_n).$$

On note par $-L$ le générateur infinitésimal de (P_t) et nous avons

$$(I+L)^\alpha \phi = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^\alpha I_n(\phi_n).$$

Dans la suite nous allons noter par Q_t le semi-groupe sous-markovien défini par

$$Q_t \phi = e^{-t} P_t \phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+n)t} I_n(\phi_n),$$

dont le générateur est $-(I+L)$, *i.e.*,

(1) $$dQ_t/dt = -(I+L)\, Q_t$$

et

(2) $$\| Q_t \phi \|_p \leq \| \phi \|_p\, e^{-t}.$$

Note présentée par Paul-André MEYER.

0764-4442/93/03171065 $ 2.00 © Académie des Sciences

INÉGALITÉS D'INTERPOLATION. — Le résultat essentiel de cette Note est le théorème ci-dessous, qui répond à une question de D. Stroock :

THÉORÈME. — *Pour tout* $p>1$, *il existe une constante* $C_p>0$ *telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\|\nabla\phi\|_p \leqq C_p(\|\phi\|_p + \|\phi\|_p^{1/2}\,\|\nabla^2\phi\|_p^{1/2}),$$

pour toute fonctionnelle ϕ *sur* W.

Remarque 1. — L'inégalité ci-dessus signifie qu'elle est vraie pour toutes les fonctionnelles de Wiener régulières, par exemple les polynômes ou les fonctions-test au sens de Watanabe; elle s'étend ensuite par fermeture aux domaines appropriés.

Un corollaire immédiat est

COROLLAIRE 1. — *Si* $(\phi_n,\ n\in\mathbb{N})$ *converge vers* 0 *dans* L_p *et* $\sup_n \|\nabla^2\phi_n\|_p<\infty$, *alors* $(\nabla\phi_n,\ n\in\mathbb{N})$ *converge vers* 0 *dans* $L_p(\mu, H)$.

Le théorème 1 résulte aussitôt des inégalités de Meyer et du théorème suivant, pour lequel (P_t) pourrait être n'importe quel semi-groupe sous-markovien symétrique (en fait on n'utilise même pas la symétrie, mais elle permet de ne pas redéfinir les opérateurs).

THÉORÈME 2. — *Soit* $1\leqq p\leqq\infty$. *Alors nous avons*

$$\|(I+L)^{1/2}\phi\|_p \leqq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)}\|\phi\|_p^{1/2}\,\|(I+L)\phi\|_p^{1/2}. \tag{3}$$

Preuve. — (*a*) Posons $\psi=(I+L)\phi$; comme l'opérateur $(I+L)^{-\alpha}$, $\alpha>0$ est borné sur les espaces L^p, $p\geqq 1$, nous avons $\phi=(I+L)^{-1}\psi$. Remplaçant ϕ dans la formule (3), nous voyons qu'il suffit de démontrer

$$\|(I+L)^{-1/2}\psi\|_p \leqq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)}\|\psi\|_p^{1/2}\,\|(I+L)^{-1}\psi\|_p^{1/2}. \tag{4}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(I+L)^{-1/2}\psi &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}P_t\psi\,dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^\infty t^{-1/2}Q_t\psi\,dt.\end{aligned}$$

Alors pour tout $\varepsilon>0$

$$(I+L)^{-1/2}\psi = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left[\int_0^\varepsilon t^{-1/2}Q_t\psi\,dt + \int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t\psi\,dt\right].$$

Donc

$$\|(I+L)^{-1/2}\psi\|_p \leqq \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left[\left\|\int_0^\varepsilon t^{-1/2}Q_t\psi\,dt\right\|_p + \left\|\int_\varepsilon^\infty t^{-1/2}Q_t\psi\,dt\right\|_p\right].$$

Le premier terme ci-dessus est facile à contrôler par

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\varepsilon t^{-1/2}Q_t\psi\,dt\right\|_p &\leqq \int_0^\varepsilon t^{-1/2}\|Q_t\psi\|_p\,dt\\ &\leqq \int_0^\varepsilon t^{-1/2}\|\psi\|_p\,dt\\ &= \varepsilon^{1/2}\|\psi\|_p.\end{aligned}$$

Pour contrôler le deuxième terme on utilise

$$\frac{dQ_t}{dt} = (I+L)\, Q_t = Q_t\,(I+L). \tag{8}$$

Pour simplifier la notation, notons $f = (I+L)^{-1}\,\psi$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1/2}\, Q_t\, \psi\, dt &= \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1/2}\, Q_t\,(I+L)\,(I+L)^{-1}\,\psi\, dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1/2}\, Q_t\,(I+L)\, f\, dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1/2}\, \frac{dQ_t}{dt}\, f\, dt.\end{aligned} \tag{9}$$

Remarquons d'abord que $\| Q_t f \|_p \leqq e^{-t} \| f \|_p \to 0$. En appliquant la formule d'intégration par parties (ordinaire) à (9), on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1/2}\, \frac{d Q_t f}{dt}\, dt = -\varepsilon^{-1/2}\, Q_{\varepsilon} f + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-3/2}\, Q_t f\, dt. \tag{10}$$

Comme $\| Q_{\varepsilon} f \|_p \leqq \| f \|_p$, $\| Q_t f \|_p \leqq \| f \|_p$ on a

$$\begin{aligned}\left\| \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1/2}\, Q_t\, \psi\, dt \right\|_p &\leqq \varepsilon^{-1/2}\, \| Q_{\varepsilon} f \|_p + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-3/2}\, \| Q_t f \|_p\, dt \\ &\leqq \varepsilon^{-1/2}\, \| f \|_p + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-3/2}\, \| f \|_p\, dt \\ &= \varepsilon^{-1/2}\, \| f \|_p + \varepsilon^{-1/2}\, \| f \|_p \\ &= 2\,\varepsilon^{-1/2}\, \| f \|_p \\ &= 2\,\varepsilon^{-1/2}\, \| (I+L)^{-1}\, \psi \|_p.\end{aligned}$$

Finalement nous avons

$$\| (I+L)^{-1/2}\, \psi \|_p \leqq \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left[\varepsilon^{1/2}\, \| \psi \|_p + 2\,\varepsilon^{-1/2}\, \| (I+L)^{-1}\, \psi \|_p \right]. \tag{12}$$

L'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ et le minimum est atteint en prenant

$$\varepsilon = \frac{2\, \| (I+L)^{-1}\, \psi \|_p}{\| \psi \|_p}$$

et nous obtenons finalement

$$\| (I+L)^{-1/2}\, \psi \|_p \leqq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(1/2)}\, \| \psi \|_p^{1/2}\, \| (I+L)^{-1}\, \psi \|_p^{1/2}. \tag{13}$$

Ce qui achève la démonstration.

Note remise le 28 août 1993, acceptée après révision le 26 octobre 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N. BOULEAU et F. HIRSCH, *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*, De Gruyter Studies in Math., 14, Berlin, New York, 1991.

[2] P. A. MEYER, Notes sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, in *Séminaire de Probab. XVI*, Lecture Notes in Math., n° 920, 1982, p. 95-133.

L. D. : *ENST, Dépt. Réseaux*, 46, *rue Barrault*, 75013 *Paris, France;*

Y. Z. H. : *Institute of Math. Univ. Oslo*, PO Box 1053, *Blindern, N*-0316, *Oslo, Norway, détaché de Inst. of Math. Sci., Acad. Sinica, Wuhan, China;*

A. S. Ü : *ENST, Dépt. Réseaux*, 46, *rue Barrault*, 75013 *Paris, France* et *Institute of Math., Univ. of Oslo*, PO Box 1053, *Blindern, N*-0316, *Oslo, Norway.*