

Quelques liens entre la morphologie mathématique et l'analyse formelle de concepts

On some links between mathematical morphology and formal concept analysis

Jamal Atif¹

Isabelle Bloch²

Céline Hudelot³

¹ PSL, Université Paris-Dauphine, LAMSADE, UMR 7243, Paris, France - jamal.atif@dauphine.fr

² LTCI, CNRS, Telecom ParisTech, Université Paris-Saclay, Paris, France - isabelle.bloch@telecom-paristech.fr

³ MAS, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France - celine.hudelot@centralesupelec.fr

Résumé :

Dans cet article, nous proposons d'étendre les liens déjà établis entre les opérateurs de dérivation utilisés en analyse formelle de concepts et des opérateurs de morphologie mathématique à l'analyse formelle de concepts flous. De plus, nous proposons d'exploiter la morphologie mathématique pour naviguer dans le treillis de concepts flous et raisonner sur ceux-ci. Cet article propose à la fois une discussion générale ainsi que de nouveaux résultats sur ces liens et leur intérêt potentiel.

Mots-clés :

Analyse formelle de concepts, concepts formels flous, morphologie mathématique, treillis résidué.

Abstract:

In this paper we extend some previously established links between the derivation operators used in formal concept analysis and some mathematical morphology operators to fuzzy concept analysis. We also propose to use mathematical morphology to navigate in a fuzzy concept lattice and perform operations on it. This paper proposes a discussion and new results on such links and their potential interest.

Keywords:

Formal concept analysis, fuzzy formal concepts, mathematical morphology, residuated lattice.

1 Introduction

Avec la multiplication des formalismes se fondant sur la théorie des treillis pour le traitement de l'information, il est intéressant et utile d'établir des liens entre ces formalismes afin de transférer les résultats d'un domaine à un autre. Dans cet article, et sur la base de nos travaux antérieurs sur la morphologie mathématique et l'analyse formelle de concepts, nous établissons de nouveaux liens, en considérant de nouveaux ingrédients tels que les ensembles flous, la théorie des possibilités, les ensembles approximatifs. Dans tous ces domaines, la struc-

ture algébrique sous-jacente est un treillis. Alors que certains liens ont déjà été établis, l'apport de ce travail est de considérer la morphologie mathématique, notamment dans sa version floue. Une contribution de cet article est de proposer des opérateurs morphologiques dans les treillis de concepts, en particulier flous, à partir de notions de voisinage et de distance, afin de raisonner sur des concepts formels et de naviguer dans leur treillis.

A titre d'illustration, dans tout cet article, nous considérons un ensemble d'objets représentant des entiers entre 1 et 10, ainsi que certaines de leurs propriétés, comme l'illustre la figure 1.

Nous rappelons dans la section 2 quelques définitions et notations, liées notamment à l'analyse formelle de concepts (AFC), la morphologie mathématique (MM) et les ensembles flous. Notre première contribution est détaillée dans la section 3, en montrant les liens entre les opérateurs de dérivation de l'AFC et les dilations et érosions de la MM, dans divers contextes (tels que ceux de la théorie des ensembles, des ensembles flous et des ensembles approximatifs). Notre deuxième contribution consiste en la définition d'opérateurs originaux agissant sur les concepts formels (section 4) : nous définissons des opérateurs morphologiques sur des treillis de concepts flous.

\mathbb{K}	composite	even	odd	prime	square
1			×		×
2		×		×	
3			×	×	
4	×	×			×
5			×	×	
6	×	×			
7			×	×	
8	×	×			
9	×		×		×
10	×	×			

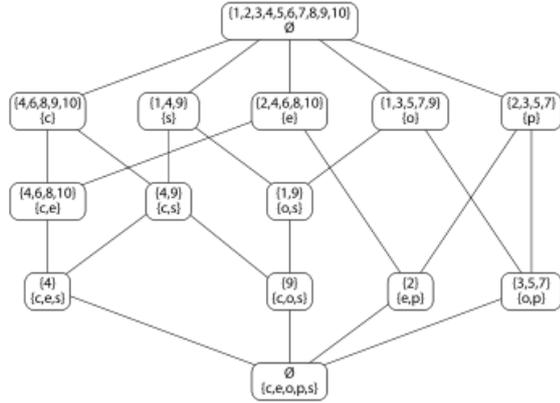


Figure 1 – Un exemple simple d'un contexte et son treillis, issu de Wikipedia (les objets sont les entiers de 1 à 10, et les attributs sont *composite* (*c*), *even* (*e*), *odd* (*o*), *prime* (*p*), *square* (*s*)).

2 Préliminaires

2.1 Analyse formelle de concepts

Un contexte formel [19] est un triplet $\mathbb{K} = (G, M, I)$, où G est un ensemble d'objets, M un ensemble d'attributs, et $I \subseteq G \times M$ une relation entre les objets et les attributs ($(g, m) \in I$ signifie que l'objet g possède l'attribut m). Un concept formel du contexte \mathbb{K} est une paire (X, Y) , où $X \subseteq G$ et $Y \subseteq M$, telle que (X, Y) est maximale pour la propriété $X \times Y \subseteq I$. L'ensemble X est appelé extension et l'ensemble Y est appelé intension du concept formel (X, Y) . Pour tout concept formel a , nous notons son extension par $e(a)$ et son intension par $i(a)$: $a = (e(a), i(a))$.

L'ensemble des concepts formels engendré par un contexte formel est hiérarchiquement ordonné par inclusion de leurs extensions : $(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2$ ($\Leftrightarrow Y_2 \subseteq Y_1$).

Cet ordre, qui reflète la relation entre sous-concept et sur-concept, induit un treillis complet appelé treillis de concepts associé au contexte (G, M, I) , et est noté $\mathbb{C}(\mathbb{K})$ ou simplement \mathbb{C} . Le treillis engendré par l'exemple des nombres est illustré à la figure 1.

Pour $X \subseteq G$ et $Y \subseteq M$, les opérateurs de dérivation α et β sont définis par $\alpha(X) = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \in I\}$ et $\beta(Y) = \{g \in G \mid \forall m \in Y, (g, m) \in I\}$. La paire (α, β) est une connexion de Galois entre les ensembles des parties d'ensembles partiellement ordonnés $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$ et $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$: $\forall X \in \mathcal{P}(G), \forall Y \in \mathcal{P}(M), Y \subseteq \alpha(X) \Leftrightarrow X \subseteq \beta(Y)$. La paire (X, Y) avec $X \subseteq G$ et $Y \subseteq M$ est un concept formel si et seulement si $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$.

2.2 Morphologie mathématique

Rappelons à présent le cadre algébrique de la morphologie mathématique. Soit (\mathcal{L}, \preceq) et (\mathcal{L}', \preceq') deux treillis complets (pas forcément égaux). L'ensemble des définitions et résultats qui suivent reposent sur des propriétés des treillis complets [8, 11, 22, 23, 26, 29, 30]. Notons que différentes terminologies peuvent être utilisées dans différents contextes d'application de la théorie générale des treillis (voir par exemple [28] pour un tableau d'équivalences).

Définition 1 Un opérateur $\delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ est une dilatation algébrique s'il commute avec le supremum : $\forall (x_i) \in \mathcal{L}, \delta(\bigvee_i x_i) = \bigvee'_i \delta(x_i)$, où \bigvee désigne le supremum associé à \preceq et \bigvee' celui associé à \preceq' .

Un opérateur $\varepsilon: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ est une érosion algébrique s'il commute avec l'infimum : $\forall (x_i) \in \mathcal{L}', \varepsilon(\bigwedge'_i x_i) = \bigwedge_i \varepsilon(x_i)$, où \bigwedge et \bigwedge' désignent l'infimum associé à \preceq et \preceq' , respectivement.

Ces définitions générales permettent d'instancier les opérateurs de morphologie mathématique tels que la dilatation et l'érosion dans différents contextes : théorie des ensembles, fonctions, ensembles flous, ensembles approximatifs, graphes, hypergraphes, logique, etc. en se fondant sur les treillis qui leur sont associés.

Les dilatations δ et érosions ε algébriques sont des opérateurs croissants. De plus, δ préserve le plus petit élément et ε le plus grand élément. Une notion fondamentale dans ce formalisme algébrique est l'adjonction.

Définition 2 Une paire d'opérateurs (ε, δ) , $\delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, $\varepsilon: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$, définit une adjonction si $\forall x \in \mathcal{L}, \forall y \in \mathcal{L}', \delta(x) \preceq' y \Leftrightarrow x \preceq \varepsilon(y)$.

La proposition suivante résume les principales propriétés utiles pour la suite.

Proposition 1 ([23, 29]) Si une paire d'opérateurs (ε, δ) est une adjonction, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- δ préserve le plus petit élément et ε préserve le plus grand élément ;
- δ est une dilatation et ε est une érosion (dans le sens de la définition 1) ;
- $\delta\varepsilon$ est anti-extensive ($\delta\varepsilon \preceq' Id_{\mathcal{L}'}$, où $Id_{\mathcal{L}'}$ est l'identité sur \mathcal{L}') et $\varepsilon\delta$ est extensive ($Id_{\mathcal{L}} \preceq \varepsilon\delta$). Les compositions $\delta\varepsilon$ et $\varepsilon\delta$ sont appelées respectivement ouverture et fermeture morphologiques ;
- $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$, $\delta\varepsilon\delta = \delta$, $\delta\varepsilon\delta\varepsilon = \delta\varepsilon$ et $\varepsilon\delta\varepsilon\delta = \varepsilon\delta$, et les ouvertures et fermetures morphologiques sont donc des opérateurs idempotents.

Soit δ et ε deux opérateurs croissants tels que $\delta\varepsilon$ est anti-extensive et $\varepsilon\delta$ est extensive. Alors (ε, δ) est une adjonction.

Le théorème de représentation suivant est vérifié : si ε est un opérateur croissant, il définit une érosion algébrique si et seulement s'il existe un opérateur δ tel que (ε, δ) est une adjonction. L'opérateur δ définit alors une dilatation algébrique et peut s'exprimer comme $\delta(x) = \bigwedge' \{y \in \mathcal{L}' \mid x \preceq \varepsilon(y)\}$.

Des formes particulières de dilatation et d'érosion peuvent être définies à partir de la notion d'élément structurant, qui peut correspondre à une relation de voisinage ou toute relation binaire [11, 30]. Des exemples de ces relations seront donnés dans les sections suivantes.

Définition 3 Un opérateur $\delta^a: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ est une anti-dilatation si $\forall (x_i) \in \mathcal{L}$, $\delta^a(\bigvee_i x_i) =$

$\bigwedge'_i \delta^a(x_i)$.

Un opérateur $\varepsilon^a: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ est une anti-érosion si $\forall (x_i) \in \mathcal{L}'$, $\varepsilon^a(\bigwedge'_i x_i) = \bigvee_i \varepsilon^a(x_i)$.

2.3 Treillis des ensembles flous

Pour le cas flou, nous nous appuyerons sur la structure classique des treillis résiduels des ensembles flous. Pour simplifier, nous considérons des fonctions d'appartenance à valeurs dans $L = [0, 1]$. Le treillis résidué correspondant est noté $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, où \wedge désigne l'infimum, \vee le supremum, et $*$ et \rightarrow représentent la conjonction et son implication adjointe, respectivement¹. L'ordre partiel associé sur les ensembles flous est défini par $\mu \preceq \nu \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{S}, \mu(x) \leq \nu(x)$, où μ et ν sont des ensembles flous (ou de façon équivalente leurs fonctions d'appartenance), définis sur l'espace sous-jacent \mathcal{S} . Le treillis résidué des ensembles flous est noté $(\mathcal{F}, \preceq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$. En particulier, nous utiliserons des ensembles flous définis sur $\mathcal{S} = G$, donc $\mathcal{F} = L^G$, et sur $\mathcal{S} = M$, donc $\mathcal{F} = L^M$. Les opérateurs morphologiques algébriques sont définis sur ce treillis comme dans la définition 1, et les opérateurs construits à partir des éléments structurants s'étendent aussi au cas flou [9, 12, 25].

3 Quelques liens entre morphologie mathématique et opérateurs de dérivation

3.1 Cas classique, ensembliste

Comme mentionné brièvement dans [11] puis détaillé dans [2], l'AFC et la MM reposent sur le cadre algébrique des treillis complets et ainsi partagent plusieurs similitudes. Dans cette section, nous soulignons certaines propriétés partagées entre les érosions et dilatations, et les opérateurs de dérivation dans le cadre classique, non flou. Le premier lien important vient du fait que la paire (ε, δ) est une adjonction (appelée parfois connexion de Galois monotone) et (α, β) est une connexion de Galois anti-

1. La propriété d'adjonction s'écrit $c * a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b$ et l'implication est définie par résiduation à partir de la conjonction par $a \rightarrow b = \sup\{c \in L \mid c * a \leq b\}$.

tone. Il est évident que ces deux propriétés sont équivalentes si l'on inverse l'ordre sur l'un des deux treillis. Cela vaut pour toutes les propriétés déduites des adjonctions et des connexions de Galois (proposition 1). Les plus importantes sont résumées dans le tableau 1².

Comme mentionné plus haut, la terminologie peut changer selon les domaines : les opérateurs croissants, idempotents et extensifs sont appelés fermetures en MM et clôtures en AFC, alors que les opérateurs croissants, idempotents et anti-extensifs sont appelés ouvertures en MM et noyaux en AFC. De même, la littérature en AFC parle de systèmes de clôture alors que l'on parle de familles de Moore en MM.

Dans [2], nous sommes allés au-delà de la simple mise en correspondance de terminologies entre ces théories, en proposant de nouveaux opérateurs morphologiques définis sur le treillis de concepts. Ces opérateurs ont été définis avec l'objectif de raisonner sur les treillis de concepts, en particulier quand ceux-ci correspondent à des concepts logiques [3]. Cette idée est développée dans la section 4.

Définition 4 Soit un élément structurant centré en $m \in M$, ou un voisinage de m , défini comme l'ensemble des $g \in G$ tel que $(g, m) \in I$ (inversement l'ensemble des $m \in M$ tel que $(g, m) \in I$ est un voisinage de g). Nous définissons des opérateurs δ_I et ε_I^* de $\mathcal{P}(M)$ vers $\mathcal{P}(G)$, et δ_I^* et ε_I de $\mathcal{P}(G)$ vers $\mathcal{P}(M)$ par : $\forall X \in \mathcal{P}(G), \forall Y \in \mathcal{P}(M)$,

$$\begin{aligned}\delta_I(Y) &= \{g \in G \mid \exists m \in Y, (g, m) \in I\}, \\ \varepsilon_I(X) &= \{m \in M \mid \forall g \in G, (g, m) \in I \Rightarrow g \in X\}, \\ \delta_I^*(X) &= \{m \in M \mid \exists g \in X, (g, m) \in I\}, \\ \varepsilon_I^*(Y) &= \{g \in G \mid \forall m \in Y, (g, m) \in I \Rightarrow m \in Y\}.\end{aligned}$$

Proposition 2 Les paires d'opérateurs $(\varepsilon_I, \delta_I)$ et $(\varepsilon_I^*, \delta_I^*)$ forment des adjonctions (et δ_I et δ_I^* sont des dilatations, ε_I et ε_I^* sont des érosions). De plus, la relation de dualité suivante est vérifiée : $\delta_I(M \setminus Y) = G \setminus \varepsilon_I^*(Y)$ et $\delta_I^*(G \setminus X) = M \setminus \varepsilon_I(X)$.

2. Dans le tableau, nous notons $\text{Inv}(\varphi)$ l'ensemble des invariants d'un opérateur $\varphi : x \in \text{Inv}(\varphi)$ ssi $\varphi(x) = x$.

Proposition 3 En utilisant les opérateurs de dérivation sur le contexte (G, M, I) , les opérateurs de la définition 4 peuvent s'exprimer comme suit : $\delta_I(Y) = \bigcup_{m \in Y} \beta(\{m\})$, $\varepsilon_I(X) = \{m \in M \mid \beta(\{m\}) \subseteq X\}$, $\delta_I^*(X) = \bigcup_{g \in X} \alpha(\{g\})$, $\varepsilon_I^*(Y) = \{g \in G \mid \alpha(\{g\}) \subseteq Y\}$.

Nous verrons dans la section suivante que nous retrouvons ainsi, par une construction morphologique, des opérateurs proposés dans un cadre possibiliste.

3.2 Cadre possibiliste et flou

Considérons dans un premier temps un contexte non flou et les quatre fonctions d'ensembles de la théorie des possibilités, dont l'intérêt pour l'AFC a été démontré dans [16, 17]. En utilisant les notations ci-dessus, ces fonctions s'écrivent, pour $X \in \mathcal{P}(G)$ [16] :

possibilité potentielle ou faible : $I^\Pi(X) = \{m \in M \mid \exists g \in X, (g, m) \in I\}$, qui exprime les propriétés satisfaites par au moins un objet dans X ;

nécessité forte ou garantie : $I^N(X) = \{m \in M \mid \forall g \in G, (g, m) \in I \Rightarrow g \in X\}$, qui comporte toutes les propriétés telles que tout objet satisfaisant l'une d'elles est nécessairement dans X ;

possibilité forte ou garantie : $I^\Delta(X) = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \in I\}$, qui correspond à l'ensemble des propriétés partagées par tous les objets dans X ;

nécessité potentielle ou faible : $I^\nabla(X) = \{m \in M \mid \{g \in G \mid (g, m) \in I\} \cup X \neq G\}$, qui comporte toute propriété telle qu'il existe un objet dans $\bar{X} = G \setminus X$ qui ne la satisfait pas ;

et des expressions similaires pour $Y \in \mathcal{P}(M)$. Notons que des notions semblables (avec parfois des appellations différentes) peuvent être trouvées dans [18] et [31] pour les ensembles approximatifs (les résultats suivants établissent ainsi, de façon implicite, des liens entre l'AFC, les ensembles approximatifs et la morphologie mathématique).

La proposition suivante (dont la preuve est immédiate) met en évidence les liens entre ces

Tableau 1 – Similarités entre morphologie mathématique et analyse formelle de concepts [2].

Adjonctions, dilatations et érosions	Connexions de Galois, opérateurs de dérivation
$\delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}', \varepsilon: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$	$\alpha: \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(M), \beta: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(G)$
$\delta(x) \preceq' y \iff x \preceq \varepsilon(y)$	$X \subseteq \beta(Y) \iff Y \subseteq \alpha(X)$
opérateurs croissants	opérateurs décroissants
$\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon, \delta\varepsilon\delta = \delta$	$\alpha\beta\alpha = \alpha, \beta\alpha\beta = \beta$
$\varepsilon\delta =$ fermeture (clôture), $\delta\varepsilon =$ ouverture (noyau)	$\alpha\beta$ et $\beta\alpha =$ clôtures (fermetures)
$\text{Inv}(\varepsilon\delta) = \varepsilon(\mathcal{L}'), \text{Inv}(\delta\varepsilon) = \delta(\mathcal{L})$	$\text{Inv}(\alpha\beta) = \alpha(\mathcal{P}(G)), \text{Inv}(\beta\alpha) = \beta(\mathcal{P}(M))$
$\varepsilon(\mathcal{L}')$ est une famille de Moore,	$\alpha(\mathcal{P}(G))$ et $\beta(\mathcal{P}(M))$ sont des familles de Moore
$\delta(\mathcal{L})$ est une famille de Moore duale	(ou systèmes de clôture)
δ est une dilatation : $\delta(\vee x_i) = \vee'(\delta(x_i))$	α est une anti-dilatation : $\alpha(\cup X_i) = \cap \alpha(X_i)$
ε est une érosion : $\varepsilon(\wedge' y_i) = \wedge(\varepsilon(y_i))$	β est une anti-dilatation : $\beta(\cup Y_i) = \cap \beta(Y_i)$

opérateurs et les opérateurs morphologiques, permettant de déduire leurs propriétés.

Proposition 4 *Pour tout $X \in \mathcal{P}(G)$:*

- $I^{\Pi}(X) = \delta_I^*(X) = \bigcup_{g \in X} \{m \in M \mid (g, m) \in I\}$, qui est une dilatation de $\mathcal{P}(G)$ vers $\mathcal{P}(M)$ (définition 4 et proposition 2). Elle commute donc avec la réunion et est croissante ;
- $I^N(X) = \varepsilon_I(X)$, qui est une érosion de $\mathcal{P}(G)$ vers $\mathcal{P}(M)$ (définition 4 et proposition 2), duale de δ_I^* . Elle commute avec l'intersection et est croissante ;
- $I^\Delta(X) = \alpha(X)$ et correspond à une anti-dilatation (tableau 1) ;
- $I^\nabla(X)$ correspond au dual de $I^\Delta(X)$ et est une anti-érosion : $I^\nabla(X \cap X') = I^\nabla(X) \cup I^\nabla(X')$.

Des résultats similaires sont vérifiés pour les opérateurs agissant sur $Y \in \mathcal{P}(M)$.

Considérons à présent des contextes flous, où X et Y sont des sous-ensembles flous de G et M , et I est une relation floue ($I(g, m)$ désigne désormais le degré avec lequel l'objet g satisfait la propriété m). Le treillis résidué introduit dans la section 2.3 est utilisé ici. Les opérateurs de dérivation ont été généralisés au cas flou dans [4, 5] (voir [6] pour une discussion générale sur les différentes approches floues de l'AFC), aboutissant aux ensembles flous $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ définis par :

$$\alpha(X)(m) = \bigwedge_{g \in G} (X(g) \rightarrow I(g, m)) \quad (1)$$

$$\beta(Y)(g) = \bigwedge_{m \in M} (Y(m) \rightarrow I(g, m)) \quad (2)$$

A l'instar du cas classique (non flou), un concept formel flou est une paire d'ensembles flous (X, Y) telle que $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$. A partir de l'ordre partiel classique sur les ensembles flous \preceq , un ordre partiel \preceq sur les concepts formels flous³ est défini par $(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2) \iff X_1 \preceq X_2$ (et de façon équivalente $Y_2 \preceq Y_1$), et induit une structure de treillis complet sur l'ensemble des concepts formels flous, noté \mathbb{C}^F . Comme montré dans [5], l'infimum et le supremum d'une famille de concepts flous $(X_t, Y_t)_{t \in T}$ s'écrivent :

$$\bigwedge_{t \in T} (X_t, Y_t) = (\bigwedge_{t \in T} X_t, \alpha(\beta(\bigvee_{t \in T} Y_t))), \quad (3)$$

$$\bigvee_{t \in T} (X_t, Y_t) = (\beta(\alpha(\bigvee_{t \in T} X_t)), \bigwedge_{t \in T} Y_t), \quad (4)$$

où \wedge et \vee correspondent à l'intersection et la réunion classiques des ensembles flous, définies comme l'infimum et le supremum point à point des fonctions d'appartenance.

Considérons une version floue du contexte de la figure 1 (tableau 2), où les degrés différents de 0 et 1 peuvent représenter une connaissance incomplète, imprécise ou incertaine, selon la sémantique du domaine et du type d'imperfection. Dans cet exemple, il s'agit de satisfaction graduelle d'une propriété, représentée par un nombre (précis). Dans ce contexte, et pour la conjonction et l'implication de Lukasiewicz, un exemple de concept formel flou

3. La même notation est utilisée ici puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

est : $X(1) = 0, 4, X(2) = \dots = X(8) = 0, X(9) = 0, 9, X(10) = 0$ et $Y(c) = 0, 8, Y(e) = 0, 1, Y(o) = 1, Y(p) = 0, 1, Y(s) = 1$ (et nous avons bien $\alpha(X) = Y, \beta(Y) = X$). Un autre exemple est : $X'(1) = 0, 3, X'(2) = 0, X'(3) = 0, 6, X'(4) \dots = X'(8) = 0, X'(9) = 0, 9, X'(10) = 0$ et $Y'(c) = 0, 9, Y'(e) = 0, 1, Y'(o) = 0, 4, Y'(p) = 0, 1, Y'(s) = 1$.

\mathbb{K}	composite	even	odd	prime	square
1	0,2	0	1	0,2	1
2	0,2	1	0	1	0
3	0,2	0	1	1	0
4	0,8	1	0	0	1
5	0,2	0	1	1	0
6	0,8	1	0	0	0
7	0,2	0	1	1	0
8	0,8	1	0	0	0
9	0,8	0	1	0	1
10	0,8	1	0	0	0

Tableau 2 – Un exemple de contexte flou.

Proposition 5 *Les opérateurs de dérivation α et β définis par les équations 1 et 2 sont des anti-dilatations floues.*

Définition 5 *L'extension au cas flou des opérateurs morphologiques flous introduits dans la définition 4 découle des résultats de la morphologie mathématique floue [9, 12] : $\forall X \in L^G, \forall Y \in L^M, \forall g \in G, \forall m \in M,$*

$$\begin{aligned} \delta_I(Y)(g) &= \vee_{m \in M} (Y(m) * I(g, m)), \\ \varepsilon_I(X)(m) &= \wedge_{g \in G} (I(g, m) \rightarrow X(g)), \\ \delta_I^*(X)(m) &= \vee_{g \in G} (X(g) * I(g, m)), \\ \varepsilon_I^*(Y)(g) &= \wedge_{m \in M} (I(g, m) \rightarrow Y(m)). \end{aligned}$$

Notons que nous utilisons ici une extension directe des définitions et résultats de [9, 12] en considérant que l'élément structurant flou est une relation binaire floue quelconque, sans hypothèse d'espace métrique sous-jacent. De même, les deux treillis définissant les ensembles de départ et d'arrivée des opérateurs morphologiques n'ont pas besoin d'être identiques, tout en gardant les mêmes propriétés.

Proposition 6 *Les quatre fonctions d'ensembles de la théorie des possibilités s'étendent*

au cas flou, et en particulier $I^\Pi(X) = \delta_I^(X)$ est une dilatation, $I^N(X) = \varepsilon_I(X)$ est une érosion, $I^\Delta(X) = \alpha(X)$ est une anti-dilatation, $I^\nabla(X)$ est une anti-érosion.*

Certains de ces résultats ont été obtenus, parfois dans des cas particuliers, dans [1], avec des illustrations pour des éléments structurants spatialement invariants et binaires, ou encore dans [14].

Proposition 7 *Si nous notons par I_M^Π et I_M^N les opérateurs agissant sur $Y \in M$, alors, selon les résultats de [9], les compositions $I_M^\Pi(I^N(X))$ et $I_M^N(I^\Pi(X))$ sont des ouvertures et fermetures algébriques, pour une conjonction $*$ continue, si et seulement si $*$ et \rightarrow sont adjoints. Si la dualité par rapport à la complémentation est aussi requise, alors les opérateurs de Lukasiewicz (à une bijection près sur les valeurs d'appartenance) doivent être choisis. Le même résultat s'applique pour $I^\Pi(I_M^N(Y))$ et $I^N(I_M^\Pi(Y))$.*

Notons que si la propriété de fermeture (ou d'ouverture) est déduite classiquement de l'adjonction en morphologie mathématique dans le cas le plus général (et inversement la croissance des opérateurs et l'extensivité ou l'anti-extensivité de leur combinaison entraîne l'adjonction), elle peut être obtenue pour I^Δ et I_M^Δ pour une propriété plus faible de l'implication ($a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$) [15].

Comme pour la connexion de Galois ou l'adjonction, deux points de vue peuvent être adoptés :

1. La version classique (non floue) de ces propriétés est considérée, avec l'inclusion classique \preceq entre les ensembles flous (voir section 2.3).

Proposition 8 *Les versions floues de α et β (équations 1 et 2) définissent une connexion de Galois. De même, les versions floues de $(\varepsilon_I, \delta_I)$ et $(\varepsilon_I^*, \delta_I^*)$ (définition 5) forment des adjonctions pour les connecteurs adjoints $*$ et \rightarrow .*

2. Des versions floues de ces propriétés peuvent être obtenues en considérant un degré d'inclusion S , comme dans [4], ce qui

permet d'établir un lien avec ces travaux : $S(X, X') = \bigwedge_{g \in G} (X(g) \rightarrow X'(g))$. La paire (α, β) définie dans [4] (voir aussi [5, 21]) est une connexion de Galois si $S(X, X') \leq S(\alpha(X'), \alpha(X))$, $S(Y, Y') \leq S(\beta(Y'), \beta(Y))$ et $S(X, \beta\alpha(X)) = S(Y, \alpha\beta(Y)) = 1$ (ou de façon équivalente $S(X, \beta(Y)) = S(Y, \alpha(X))$), ce qui est vérifié pour α et β définis à partir de l'implication floue \rightarrow . Des résultats similaires sont obtenus pour les opérateurs morphologiques :

Proposition 9 *Pour les opérateurs morphologiques flous de la définition 5 et des connecteurs adjoints $*$ et \rightarrow , nous avons pour tous $X, X' \in \mathcal{P}(G), Y, Y' \in \mathcal{P}(M)$:*

$$\begin{aligned} S(\delta_I(\varepsilon_I(X)), X) &= S(X, \varepsilon_I^*(\delta_I^*(X))) = 1, \\ S(Y, \varepsilon_I(\delta_I(Y))) &= S(\delta_I^*(\varepsilon_I^*(Y)), Y) = 1, \\ S(X, \varepsilon_I^*(Y)) &= S(\delta_I^*(X), Y), \\ S(Y, \varepsilon_I(X)) &= S(\delta_I(Y), X), \\ S(X, X') &\leq S(\varepsilon_I(X), \varepsilon_I(X')), \\ S(X, X') &\leq S(\delta_I^*(X), \delta_I^*(X')), \\ S(Y, Y') &\leq S(\varepsilon_I^*(Y), \varepsilon_I^*(Y')), \\ S(Y, Y') &\leq S(\delta_I(Y), \delta_I(Y')). \end{aligned}$$

Les preuves reposent sur la propriété d'adjonction ainsi que les propriétés classiques des connecteurs adjoints, du supremum et de l'infimum.

4 Morphologie mathématique pour concepts formels

L'objectif ici est d'aller plus loin que les liens pointés dans la section 3 en proposant des opérateurs morphologiques définis sur le treillis de concepts. Comme dans tout treillis complet, la dilatation et l'érosion algébriques sont définies comme des opérateurs commutant avec le supremum et l'infimum, respectivement.

4.1 Cas classique, non flou

Dans [2], nous avons développé cette idée pour le cas classique (non flou), et avons proposé deux types d'opérateurs. La première classe d'opérateurs repose sur la notion d'élément

structurant, défini comme un voisinage des éléments de G ou comme une relation binaire entre ceux-ci. Plus précisément, nous avons considéré comme voisinage une boule de taille 1 associée à une distance définie sur G , elle-même induite à partir d'une distance définie sur \mathbb{C} . Une telle distance peut être construite à partir de valuations sur le treillis (voir par exemple [8, 24] pour plus de détails sur les valuations, leurs propriétés et les distances qui en découlent). Pour la deuxième classe d'opérateurs, nous avons défini les opérateurs morphologiques directement à partir de distances sur \mathbb{C} .

4.2 Cas flou

Le but de cette section est de proposer des extensions floues des opérateurs morphologiques sur les treillis de concepts flous. Un concept flou $a \in \mathbb{C}^F$ sera noté $a = (e(a), i(a))$, où $e(a) \in L^G$ et $i(a) \in L^M$. Le cardinal d'un sous-ensemble flou X de G est considéré ici comme un nombre : $|X| = \sum_{g \in G} X(g)$ (de même pour les sous-ensembles flous de M).

Proposition 10 *Soient ω_G et ω_M les fonctions définies par : $\forall a \in \mathbb{C}^F, \omega_G(a) = |G| - |e(a)|$ et $\omega_M(a) = |i(a)|$. Ces deux fonctions sont des valuations décroissantes, ω_G est une valuation supérieure (telle que $\omega_G(a_1) + \omega_G(a_2) \geq \omega_G(a_1 \wedge a_2) + \omega_G(a_1 \vee a_2)$) et ω_M est une valuation inférieure (telle que $\omega_M(a_1) + \omega_M(a_2) \leq \omega_M(a_1 \wedge a_2) + \omega_M(a_1 \vee a_2)$).*

La fonction d_{ω_G} définie pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^F$ par :

$$d_{\omega_G}(a_1, a_2) = 2\omega_G(a_1 \wedge a_2) - \omega_G(a_1) - \omega_G(a_2),$$

où \wedge et \vee représentent l'infimum et le supremum des concepts flous (équations 3 et 4), est une métrique dans \mathbb{C}^F .

De même, la fonction d_{ω_M} définit par :

$$d_{\omega_M}(a_1, a_2) = \omega_M(a_1) + \omega_M(a_2) - 2\omega_M(a_1 \vee a_2)$$

est une métrique dans \mathbb{C}^F .

Proposition 11 *La fonction d_{ω_G} est égale, pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^F$, à :*

$$d_{\omega_G}(a_1, a_2) = |e(a_1) \vee e(a_2)| - |e(a_1) \wedge e(a_2)|,$$

où \wedge et \vee représentent l'intersection et la réunion des ensembles flous.

De même, la fonction d_{ω_M} est égale à :

$$d_{\omega_M}(a_1, a_2) = |i(a_1) \vee i(a_2)| - |i(a_1) \wedge i(a_2)|.$$

La distance entre les deux exemples de concepts flous (X, Y) et (X', Y') de la section 3.2 est égale à 0,7 (pour d_{ω_G} et d_{ω_M}). Dans le cas particulier où les ensembles sont non flous (binaires), ces résultats sont équivalents à ceux obtenus dans [2]. De plus, les distances construites à partir de filtres et d'idéaux dans [2] s'étendent directement au cas flou. Nous ne les détaillons pas dans cet article.

Soit d^F une métrique quelconque définie sur \mathbb{C}^F . Elle induit une pseudo-métrique sur G ou M en l'appliquant sur les concepts-objets ou les concepts-attributs. A titre d'exemple, pour tous $g_1, g_2 \in G$, on peut définir la pseudo-métrique $d(g_1, g_2) = d^F(p(g_1), p(g_2))$, où $p(g) = (\beta\alpha(\{g\}), \alpha(\{g\}))$ désigne un concept-objet flou de g , extension directe de la notion de concept-objet dans le cas non flou (un concept-attribut est défini de manière similaire).

Définition 6 Les dilatations et érosions dans (L^G, \preceq) sont définies, pour tout $X \in L^G$, par : $\forall g \in G$,

$$\delta_b(X)(g) = \sup_{g' \in b(g)} X(g'), \quad \varepsilon_b(X)(g) = \inf_{g' \in b(g)} X(g'),$$

où b est un élément structurant défini par : $b(g) = \{g' \in G \mid d(g, g') \leq 1\}$. Les dilatations et érosions de taille n sont définies en utilisant $\{g' \in G \mid d(g, g') \leq n\}$ comme élément structurant.

Proposition 12 δ_b est extensive et ε_b est anti-extensive.

Des définitions et résultats similaires s'appliquent pour L^M .

Une autre construction repose sur des générateurs.

Définition 7 Un ensemble élémentaire flou X_g , associé à un ensemble flou X , est défini par $X_g(g) = X(g)$ et $\forall g' \in G \setminus \{g\}, X_g(g') = 0$.

Proposition 13 Tout ensemble flou X est sup-engendré par l'ensemble des $X_g : X = \bigvee_{g \in G} X_g$ ⁴.

Définition 8 Le concept-objet flou d'un ensemble flou élémentaire X_g est défini par $\tilde{p}(X_g) = (\beta\alpha(X_g), \alpha(X_g))$.

Proposition 14 \mathbb{C}^F est sup-engendré par les concepts-objets associés aux ensembles élémentaires flous : $\forall a = (X, Y) \in \mathbb{C}^F, (X, Y) = \bigvee_{g \in G} \tilde{p}(X_g)$, où \bigvee est donné dans l'équation 4.

Définition 9 De toute dilatation $\tilde{\delta}$ sur les concepts-objets flous générateurs (images des ensembles flous élémentaires par \tilde{p}), on déduit une dilatation sur \mathbb{C}^F selon : $\forall a = (X, Y) \in \mathbb{C}^F, \delta(a) = \bigvee_{g \in G} \tilde{\delta}(\tilde{p}(X_g))$.

Une construction similaire s'applique pour l'érosion, à partir de la propriété d'inf-génération des concepts, étendue au cas flou, et de la commutativité avec l'infimum de l'érosion.

Une décomposition classique des ensembles ordonnés est la décomposition en éléments irréductibles pour la disjonction. Soit $\mathcal{J}(\mathbb{C}^F)$ l'ensemble des éléments irréductibles de \mathbb{C}^F : $\mathcal{J}(\mathbb{C}^F) = \{a \in \mathbb{C}^F \mid \forall b, c \in \mathbb{C}^F, a = b \vee c \Rightarrow a = b \text{ or } a = c\}$. Nous avons [13] :

$$\forall a \in \mathbb{C}^F, a = \bigvee \{b \in \mathcal{J}(\mathbb{C}^F) \mid b \preceq a\}.$$

On note $\mathcal{J}(a)$ l'ensemble des éléments b impliqués dans cette décomposition. Une contrainte de minimalité peut aussi être considérée, comme suggéré dans [2].

Définition 10 A partir d'une distance d dans \mathbb{C}^F , il est possible de déduire une dilatation (de taille n) de $\mathcal{J}(\mathbb{C}^F)$ vers \mathbb{C}^F selon :

$$\forall b \in \mathcal{J}(\mathbb{C}^F), \delta_J(b) = \bigvee \{b \in \mathbb{C}^F \mid d(a, b) \leq n\},$$

et une dilatation sur \mathbb{C}^F selon :

$$\forall a \in \mathbb{C}^F, \delta(a) = \bigvee \{\delta_J(b) \mid b \in \mathcal{J}(\mathbb{C}^F) \text{ and } b \preceq a\}.$$

4. De manière plus générale, l'ensemble des $X_g^\lambda, g \in G, \lambda \in L$, tels que $X_g^\lambda(g) = \lambda$ et $\forall g' \neq g, X_g^\lambda(g') = 0$ est sup-générateur du treillis des ensembles flous.

Le supremum dans cette définition peut être restreint à l'ensemble des b aboutissant à une décomposition minimale de a . Une construction similaire de l'érosion peut être obtenue à partir de la décomposition en éléments irréductibles pour la conjonction de tout élément de \mathbb{C}^F . Dans le cas particulier des distances dites \vee -compatibles, les dilatations qui en découlent sont construites par extension floue des opérateurs définis dans [2].

Définition 11 Une distance est dite \vee -compatible, notée d^\vee , si pour tout $n \in \mathbb{R}^+$ et toute famille (a_i) d'éléments dans \mathbb{C}^F on a :

$$\begin{aligned} \{b \in \mathbb{C}^F \mid d^\vee(\bigvee_i a_i, b) \leq n\} \\ = \cup_i \{b \in \mathbb{C}^F \mid d^\vee(a_i, b) \leq n\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Proposition 15 Soit d une distance définie sur le treillis de concepts flous (\mathbb{C}^F, \preceq) , et \mathcal{J} l'opérateur de décomposition en éléments irréductibles pour la disjonction de (\mathbb{C}^F, \preceq) . La fonction

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^{F^2}, d^\vee(a, b) = \inf_{a_i \in \mathcal{J}(a)} d(a_i, b)$$

est une distance \vee -compatible.

Proposition 16 Soit d^\vee une distance \vee -compatible sur \mathbb{C}^F . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur défini par :

$$\forall a \in \mathbb{C}^F, \delta(a) = \bigvee \{b \in \mathbb{C} \mid d^\vee(a, b) \leq n\}$$

est une dilatation.

De la même façon, des distances \wedge -compatibles peuvent être définies, à partir de décompositions irréductibles pour la conjonction, donnant lieu à des opérateurs d'érosion.

Les fonctions d_{ω_G} et d_{ω_M} introduites plus haut peuvent être utilisées comme distances d sur \mathbb{C} .

5 Conclusion

La contribution de cet article est double. Tout d'abord, nous avons exhibé les liens entre l'analyse formelle de concepts et la morphologie

mathématique dans différents contextes (ensembles, ensembles flous, ensembles approximatifs), ouvrant la voie à de nouvelles discussions sur ces liens et sur les propriétés que chaque formalisme pourrait hériter des autres. Deuxièmement, nous avons proposé de nouveaux opérateurs sur les concepts formels en exploitant la morphologie mathématique. Ces opérations pourraient être exploitées afin de raisonner sur les treillis de concepts, pour naviguer entre les concepts, etc. Des questions algorithmiques seront abordées dans les travaux futurs, par exemple pour construire le treillis de concepts flous. Une comparaison détaillée avec d'autres travaux proches [1, 14] sera effectuée. De plus, les extensions floues proposées reposent sur des définitions du cardinal et de la distance sous forme de nombres précis. Une autre extension pourrait concerner la définition de nombres flous, mais au prix d'une complexité accrue. Enfin, des liens avec d'autres représentations méritent d'être creusés, par exemple avec les F-transformations exprimées comme des opérations dans un treillis résidué [27], ou encore avec des graphes et hypergraphes. En effet, un graphe bipartite peut être construit à partir d'un contexte formel [7, 20], dont on peut déduire deux hypergraphes duaux. Les opérations morphologiques sur des hypergraphes introduites dans [10] peuvent alors être exploitées.

Remerciements : Ce travail a été financé par le projet ANR LOGIMA.

Références

- [1] C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González. Application of the L-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 72(1-2) :115–128, 2014.
- [2] J. Atif, I. Bloch, F. Distel, and C. Hudelot. Mathematical morphology operators over concept lattices. In *International Conference on Formal Concept Analysis*, volume LNAI 7880, pages 28–43, Dresden, Germany, May 2013.
- [3] J. Atif, C. Hudelot, and I. Bloch. Explanatory reasoning for image understanding using formal concept analysis and description logics. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics : Systems*, 44(5) :552–570, May 2014.
- [4] R. Belohlavek. Fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quarterly*, 45(4) :497–504, 1999.

- [5] R. Belohlavek. Concept lattices and order in fuzzy logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128(1) :277–298, 2004.
- [6] R. Belohlavek and V. Vychodil. What is a fuzzy concept lattice? In *International Conference on Concept Lattices and their Applications (CLA)*, pages 34–45, 2005.
- [7] A. Berry and A. Sigayret. Representing a concept lattice by a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 144(1) :27–42, 2004.
- [8] G. Birkhoff. *Lattice theory (3rd edition)*, volume 25. American Mathematical Society, 1979.
- [9] I. Bloch. Duality vs. Adjunction for Fuzzy Mathematical Morphology and General Form of Fuzzy Erosions and Dilations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160 :1858–1867, 2009.
- [10] I. Bloch and A. Bretto. Mathematical morphology on hypergraphs, application to similarity and positive kernel. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(4) :342–354, 2013.
- [11] I. Bloch, H. Heijmans, and C. Ronse. Mathematical Morphology. In M. Aiello, I. Pratt-Hartman, and J. van Benthem, editors, *Handbook of Spatial Logics*, chapter 13, pages 857–947. Springer, 2007.
- [12] I. Bloch and H. Maître. Fuzzy Mathematical Morphologies : A Comparative Study. *Pattern Recognition*, 28(9) :1341–1387, 1995.
- [13] N. Caspard, B. Leclerc, and B. Monjardet. *Finite ordered sets : concepts, results and uses*. Cambridge University Press, 2012.
- [14] J.C. Diaz, N. Madrid, J. Medina, and M. Ojeda-Aciego. New links between mathematical morphology and fuzzy property-oriented concept lattices. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE*, pages 599–603, 2014.
- [15] Y. Djouadi and H. Prade. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 10(4) :287–309, 2011.
- [16] D. Dubois, F. Dupin de Saint-Cyr, and H. Prade. A possibility-theoretic view of formal concept analysis. *Fundamenta Informaticae*, 75(1) :195–213, 2007.
- [17] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory and formal concept analysis : Characterizing independent sub-contexts. *Fuzzy Sets and Systems*, 196 :4–16, 2012.
- [18] I. Düntsch and E. Orłowska. Mixing modal and sufficiency operators. *Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Sciences*, 28(2) :99–106, 1999.
- [19] B. Ganter, R. Wille, and C. Franzke. *Formal concept analysis : mathematical foundations*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [20] B. Gaume, E. Navarro, and H. Prade. A parallel between extended formal concept analysis and bipartite graphs analysis. In *International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, volume LNAI 6178, pages 270–280, 2010.
- [21] G. Georgescu and A. Popescu. Non-dual fuzzy connections. *Archive for Mathematical Logic*, 43(8) :1009–1039, 2004.
- [22] H. J. A. M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston, 1994.
- [23] H. J. A. M. Heijmans and C. Ronse. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part I : Dilations and Erosions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 50 :245–295, 1990.
- [24] B. Monjardet. Metrics on partially ordered sets – a survey. *Discrete mathematics*, 35(1) :173–184, 1981.
- [25] M. Nachttegael and E. E. Kerre. Classical and Fuzzy Approaches towards Mathematical Morphology. In E. E. Kerre and M. Nachttegael, editors, *Fuzzy Techniques in Image Processing*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, chapter 1, pages 3–57. Physica-Verlag, Springer, 2000.
- [26] L. Najman and H. Talbot. *Mathematical morphology : from theory to applications*. ISTE-Wiley, June 2010.
- [27] I. Perfilieva. Fuzzy transforms : Theory and applications. *Fuzzy sets and systems*, 157(8) :993–1023, 2006.
- [28] C. Ronse. Adjunctions on the lattices of partitions and of partial partitions. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 21(5) :343–396, 2010.
- [29] C. Ronse and H. J. A. M. Heijmans. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part II : Openings and Closings. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54 :74–97, 1991.
- [30] J. Serra (Ed.). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Part II : Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.
- [31] Y. Yao. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis. In *Rough Sets and Current Trends in Computing*, volume LNCS 3066, pages 59–68, 2004.