

# Topologie algébrique appliquée aux réseaux de capteurs

Anaïs Vergne

Télécom ParisTech  
Département INFRES

28 novembre 2013



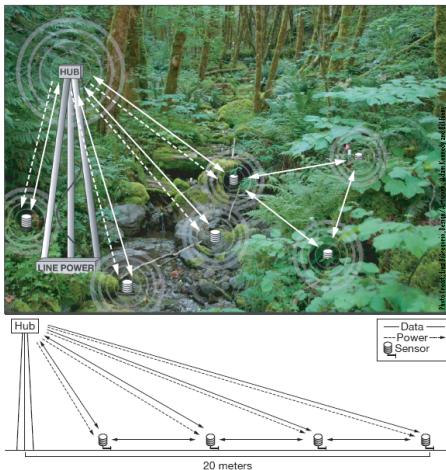
# Aperçu

- Contexte
  - Problème de couverture dans un réseau de capteurs
  - Topologie algébrique
- Économie d'énergie dans les réseaux de capteurs
  - Configurations aléatoires
  - Topologie algébrique
- Applications aux réseaux cellulaires
  - Self-Organizing Networks
  - Rétablissement après un désastre

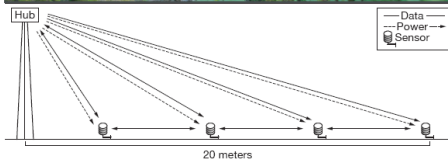
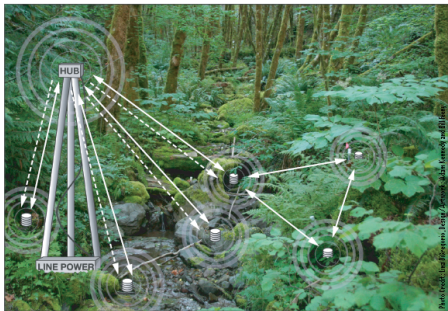
# Plan

- 1 Représentation des réseaux de capteurs
- 2 Algorithme de réduction
  - Problématique
  - Principe
  - Complexité
- 3 Applications aux réseaux cellulaires
  - Planification automatique des fréquences
  - Économie d'énergie en heures creuses
  - Rétablissement après un désastre
- 4 Conclusion

# Réseau de capteurs sans fil



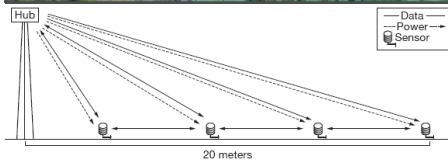
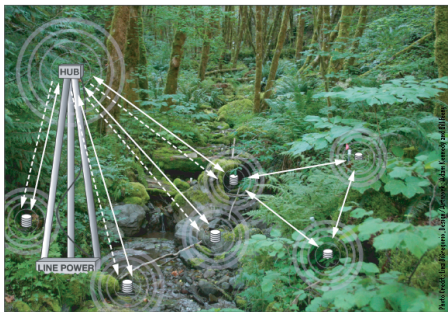
# Réseau de capteurs sans fil



- Qualité de service
  - Connectivité
  - Couverture

Source : oregonstate.edu

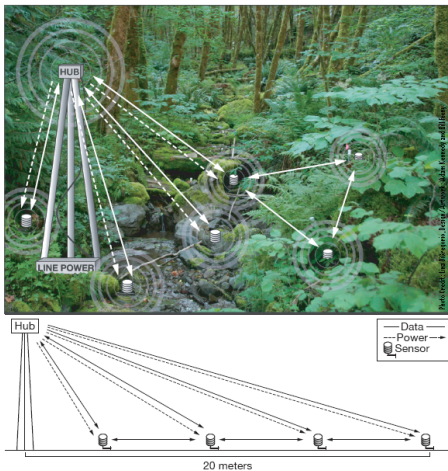
# Réseau de capteurs sans fil



- QoS : Topologie
- Information
  - Pas de géolocalisation
  - Relations entre les capteurs

Source : oregonstate.edu

## Réseau de capteurs sans fil

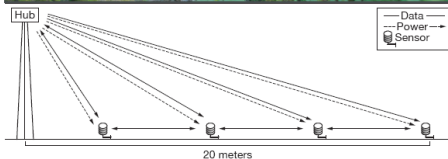
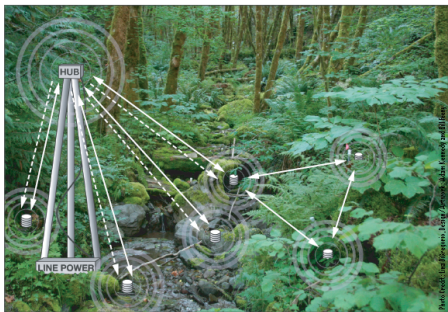


- QoS : Topologie
- Information : Connectivité
- Positions des capteurs
  - Aucun motif
  - Aléatoires

Source : oregonstate.edu

6/59

## Réseau de capteurs sans fil

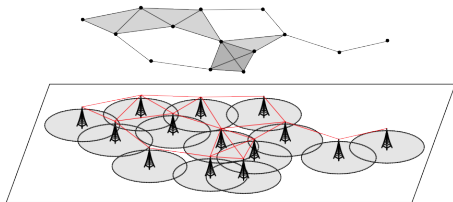


- QoS : Topologie
- Information : Connectivité
- Positions : Aléatoires
- $\Rightarrow$  Représentation par complexes simpliciaux

Source : oregonstate.edu

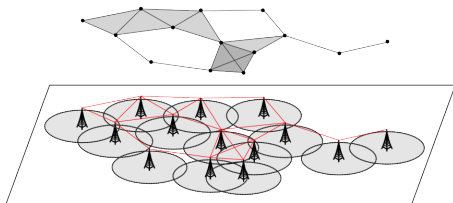


# Représentation par complexes simpliciaux



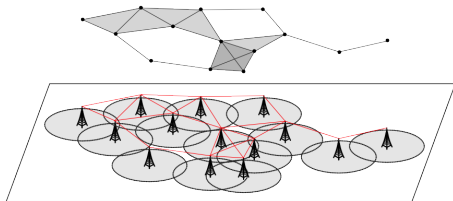
- Données géométriques
- Objet combinatoire
- Structure algébrique
- Interprétation géométrique

# Représentation par complexes simpliciaux



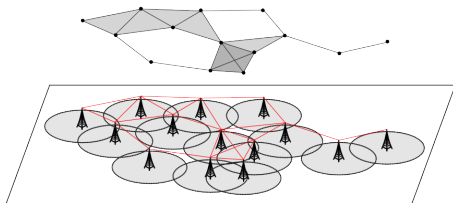
- Données géométriques
  - Capteurs, relations entre eux
- Objet combinatoire
- Structure algébrique
- Interprétation géométrique

# Représentation par complexes simpliciaux



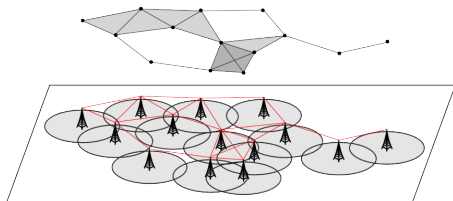
- Données géométriques
  - Capteurs, relations entre eux
- Objet combinatoire
  - **Complexe simplicial**
- Structure algébrique
- Interprétation géométrique

# Représentation par complexes simpliciaux



- Données géométriques
  - Capteurs, relations entre eux
- Objet combinatoire
  - Complexe simplicial
- Structure algébrique
  - Calcul de la topologie = calcul matriciel
- Interprétation géométrique

# Représentation par complexes simpliciaux



- Données géométriques
  - Capteurs, relations entre eux
- Objet combinatoire
  - Complexe simplicial
- Structure algébrique
  - Calcul de la topologie = calcul matriciel
- Interprétation géométrique
  - **Connectivité, couverture**

# Définitions - Homologie simpliciale

## Vocabulaire

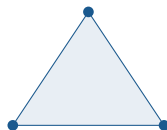
- Un complexe simplicial est une liste de simplexes.
- Un  $k$ -simplexe est un ensemble non-ordonné de  $k + 1$  sommets.
- Tout sous-ensemble de sommets d'un  $k$ -simplexe est une face de celui-ci.
- La notion inverse de face est coface.



0-simplexe



1-simplexe



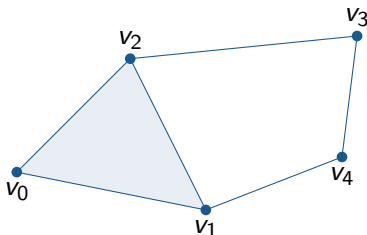
2-simplexe

## Définitions - Homologie simpliciale

### Complexe simplicial

$X$ , ensemble de  $k$ -simplexes, est un complexe simplicial abstrait si toutes les faces de tous les simplexes de  $X$  sont aussi des simplexes de  $X$ .

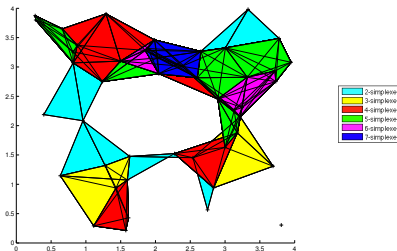
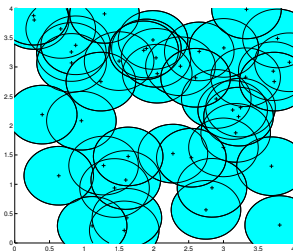
- 5 0-simplexes :  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ .
- 6 1-simplexes :  $[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2], [v_1, v_4], [v_2, v_3]$ .
- 1 2-simplexes :  $[v_0, v_1, v_2]$ .



# Complexe simplicial de couverture

## Complexe de Čech

Soient  $\omega$  un ensemble fini de sommets et  $\epsilon$  un réel positif, le complexe de Čech  $\mathcal{C}_\epsilon(\omega)$  est le complexe défini tel que  $k + 1$  sommets forment un  $k$ -simplexe si et seulement si l'intersection des  $k + 1$  boules de rayon  $\epsilon$  centrées en ces sommets, est non vide.



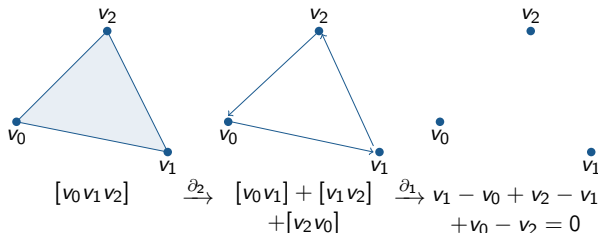


## Définitions - Topologie algébrique

- Soit  $X$  un complexe simplicial abstrait
- On note  $C_k(X)$  l'espace vectoriel généré par ses  $k$ -simplexes
- On définit la différentielle  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$

$$\partial_k[v_0, \dots, v_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k].$$

- À un  $k$ -simplexe,  $\partial_k$  associe le tour de ses  $(k-1)$ -faces



## Définitions - Topologie algébrique

## Théorème [Hatcher]

On a

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

## Définition

On définit le  $k$ -ième nombre de Betti comme

$$\beta_k = \dim \ker \partial_k - \text{rang } \partial_{k+1}$$

# Complexe simplicial de couverture

## Nombres de Betti

Les nombres de Betti d'un complexe simplicial caractérisent sa topologie.

Pour un complexe simplicial de couverture

- $\beta_0$  est le nombre de composantes connexes
- $\beta_1$  est le nombre de trous de couverture

## Représentation d'un réseau de capteurs

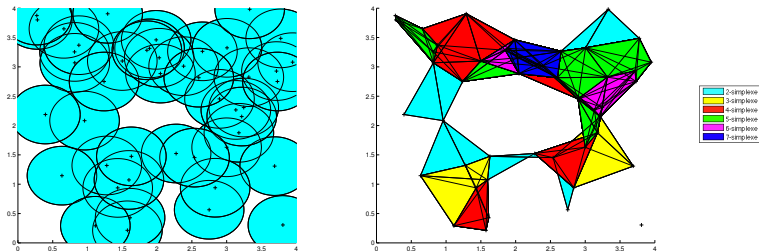


Figure: Un réseau de capteurs et son complexe de couverture associé.

# Simulation

## Ensemble de points

### Processus binomial

- Nombre de points donné
- Positions indépendantes tirées uniformément

### Processus de Poisson

- Nombre de points suivant une loi de Poisson
- Positions indépendantes tirées uniformément

# Simulation

## Complexe de Rips-Vietoris

Soient  $\omega$  un ensemble fini de sommets et  $\epsilon$  un réel positif, le complexe de Rips-Vietoris  $\mathcal{R}_\epsilon(\omega)$  est le complexe défini tel que  $k + 1$  sommets forment un  $k$ -simplexe si et seulement si ils sont 2 à 2 à une distance inférieure à  $\epsilon$ .

Approximation du complexe de Čech par la description de graphe.

# Complexité

## Implémentation du complexe pour $n$ sommets

- Liste des simplexes
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$
- $\Rightarrow$  Exponentielle

## Calcul des nombres de Betti du complexe implémenté

- Représentation matricielle des différentielles  $\partial_k$
- Calcul du rang
- $\Rightarrow$  Polynomiale

# Plan

- 1 Représentation des réseaux de capteurs
- 2 Algorithme de réduction
  - Problématique
  - Principe
  - Complexité
- 3 Applications aux réseaux cellulaires
  - Planification automatique des fréquences
  - Économie d'énergie en heures creuses
  - Rétablissement après un désastre
- 4 Conclusion



# Économie d'énergie dans les réseaux de capteurs

- Fiabilisation de la topologie du réseau
  - Capteurs en surnombre
  - Certains sont redondants pour la topologie
- Économie d'énergie
  - Mettre en veille certains capteurs
  - Conservation de la topologie
- $\Rightarrow$  Algorithme de réduction pour les complexes simpliciaux sous contrainte de conservation des nombres de Betti.

# Économie d'énergie dans les réseaux de capteurs

- Fiabilisation de la topologie du réseau
  - Capteurs en surnombre
  - Certains sont redondants pour la topologie
- Économie d'énergie
  - Mettre en veille certains capteurs
  - Conservation de la topologie
- $\Rightarrow$  Algorithme de réduction pour les complexes simpliciaux sous contrainte de conservation des nombres de Betti.

# Économie d'énergie dans les réseaux de capteurs

- Fiabilisation de la topologie du réseau
  - Capteurs en surnombre
  - Certains sont redondants pour la topologie
- Économie d'énergie
  - Mettre en veille certains capteurs
  - Conservation de la topologie
- $\Rightarrow$  Algorithme de réduction pour les complexes simpliciaux sous contrainte de conservation des nombres de Betti

# Algorithme de réduction (V., Decreusefond, Martins [2])

## But : économie d'énergie

- Mettre en veille des capteurs sans modification de la topologie
- Traduction mathématique : enlever des sommets d'un complexe simplicial sans modification de ses nombres de Betti

## Comment ?

- Utilisation de l'information du complexe simplicial pour détecter les sommets les plus redondants par rapport à la topologie et les enlever selon un ordre optimisé

# Algorithme de couverture

- Réseau de capteurs dans le plan
  - Avec une bordure de capteurs
- Entrée de l'algorithme
  - Complexe simplicial représentant le réseau
  - Liste des sommets de bordure
- Retrait de certains sommets
  - Selon un ordre optimisé
  - Conservation du nombre de composantes connexes  $\beta_0$  et du nombre de trous de couverture  $\beta_1$
- Sortie de l'algorithme
  - Complexe simplicial réduit
  - Liste des sommets retirés

# Algorithme de couverture

- Réseau de capteurs dans le plan
  - Avec une bordure de capteurs
- Entrée de l'algorithme
  - Complexe simplicial représentant le réseau
  - Liste des sommets de bordure
- Retrait de certains sommets
  - Selon un ordre optimisé
  - Conservation du nombre de composantes connexes  $\beta_0$  et du nombre de trous de couverture  $\beta_1$
- Sortie de l'algorithme
  - Complexe simplicial réduit
  - Liste des sommets retirés

# Algorithme de couverture

- Réseau de capteurs dans le plan
  - Avec une bordure de capteurs
- Entrée de l'algorithme
  - Complexe simplicial représentant le réseau
  - Liste des sommets de bordure
- Retrait de certains sommets
  - Selon un ordre optimisé
  - Conservation du nombre de composantes connexes  $\beta_0$  et du nombre de trous de couverture  $\beta_1$
- Sortie de l'algorithme
  - Complexe simplicial réduit
  - Liste des sommets retirés

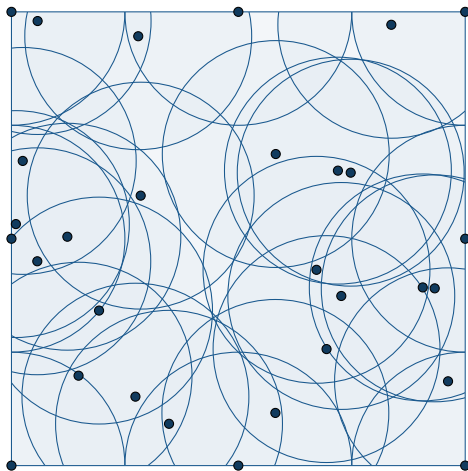
# Algorithme de couverture

- Réseau de capteurs dans le plan
  - Avec une bordure de capteurs
- Entrée de l'algorithme
  - Complexe simplicial représentant le réseau
  - Liste des sommets de bordure
- Retrait de certains sommets
  - Selon un ordre optimisé
  - Conservation du nombre de composantes connexes  $\beta_0$  et du nombre de trous de couverture  $\beta_1$
- Sortie de l'algorithme
  - Complexe simplicial réduit
  - Liste des sommets retirés



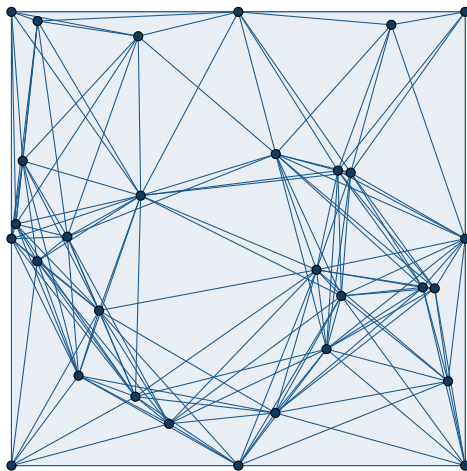
# Réseau de capteurs

- Répartition des capteurs aléatoire dans le carré
- Bordure fixe sur le carré



# Représentation

- Complexe de Rips-Vietoris
- $\beta_0 = 1$
- $\beta_1 = 0$

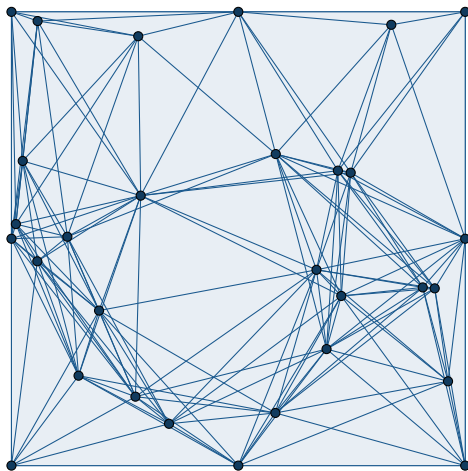


## Degré d'un triangle

### Entrée : simplexes

- Degré : taille de la plus grande coface
- $D(v_0, v_1, v_2) = \max\{d \mid (v_0, v_1, v_2) \subset d\text{-simplexe}\}$
- $D(v_0, v_1, v_2) \geq 2$

### Sortie : degrés de tous les triangles

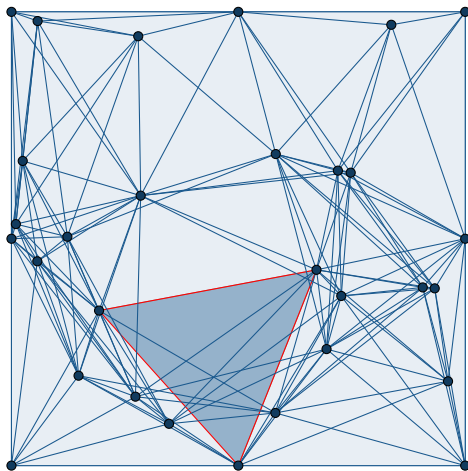


## Degré d'un triangle

### Entrée : simplexes

- Degré : taille de la plus grande coface
- $D(v_0, v_1, v_2) = \max\{d \mid (v_0, v_1, v_2) \subset d\text{-simplexe}\}$
- $D(v_0, v_1, v_2) \geq 2$

### Sortie : degrés de tous les triangles

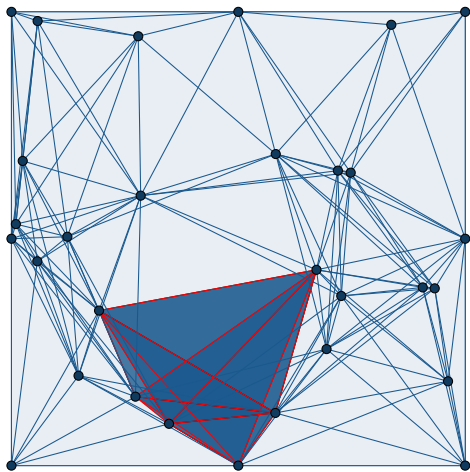


## Degré d'un triangle

### Entrée : simplexes

- Degré : taille de la plus grande coface
- $D(v_0, v_1, v_2) = \max\{d \mid (v_0, v_1, v_2) \subset d\text{-simplexe}\}$
- $D(v_0, v_1, v_2) \geq 2$

### Sortie : degrés de tous les triangles

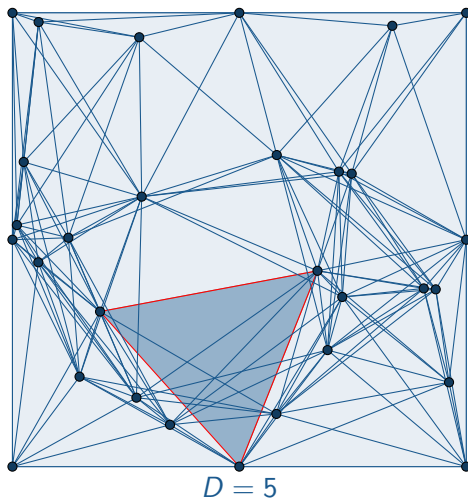


# Degré d'un triangle

## Entrée : simplexes

- Degré : taille de la plus grande coface
- $D(v_0, v_1, v_2) = \max\{d \mid (v_0, v_1, v_2) \subset d\text{-simplexe}\}$
- $D(v_0, v_1, v_2) \geq 2$

## Sortie : degrés de tous les triangles

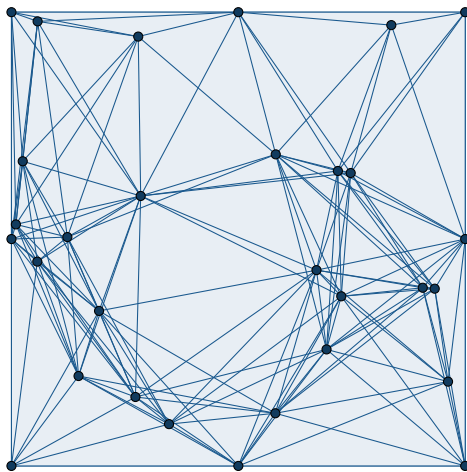


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

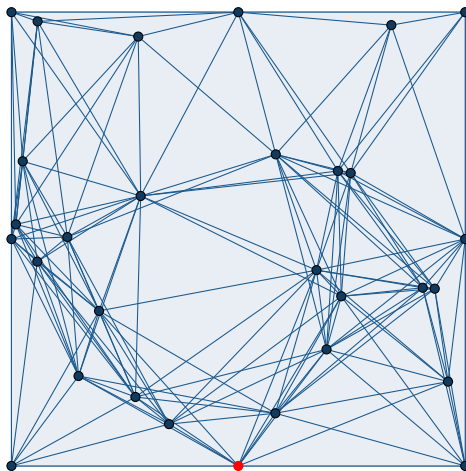


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets



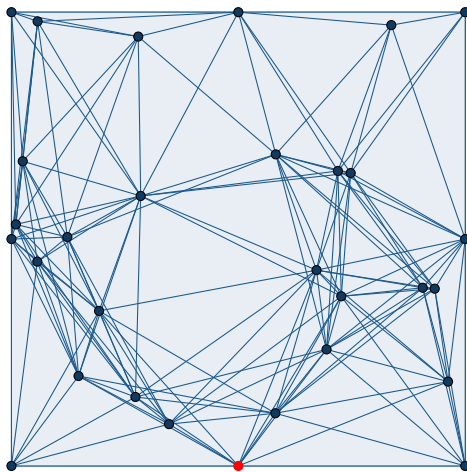


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

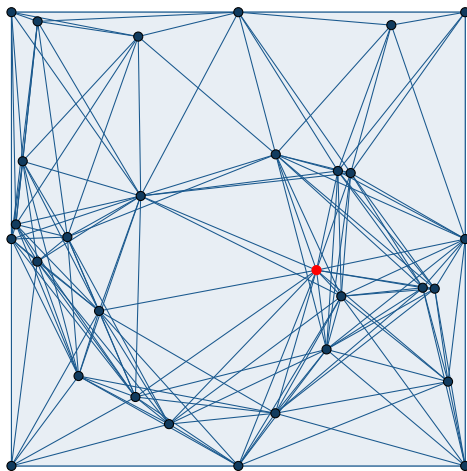


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

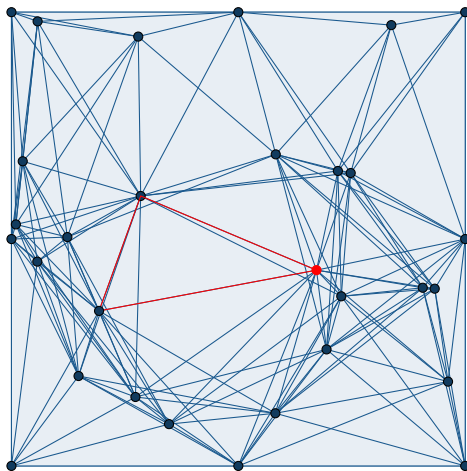


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

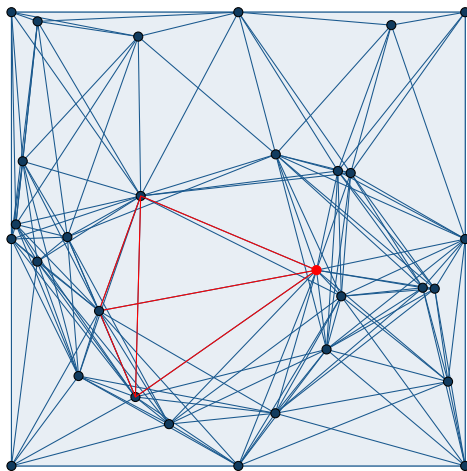


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

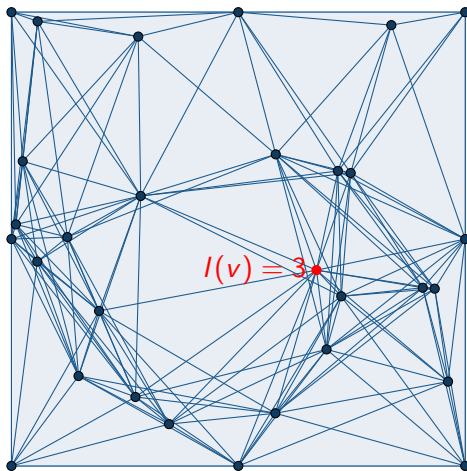


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

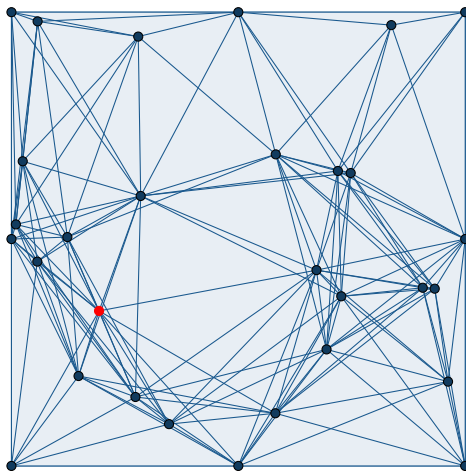


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

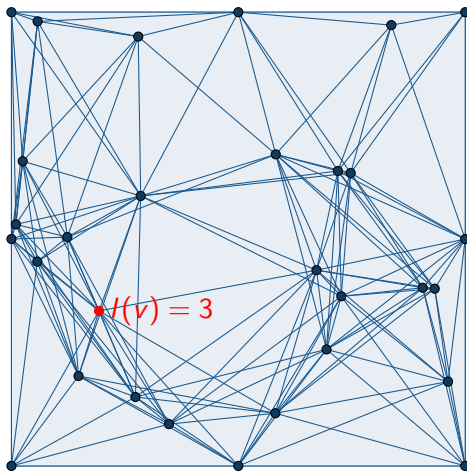


## Indice d'un sommet

**Entrée** : simplexes,  
degrés des triangles

- Indice : minimum des degrés des 2-cofaces
- $I(v) = \min\{D(v_0, v_1, v_2) \mid v \in (v_0, v_1, v_2)\}$
- Pour  $v$  dans la bordure,  $I(v) = -1$

**Sortie** : indices de tous les sommets

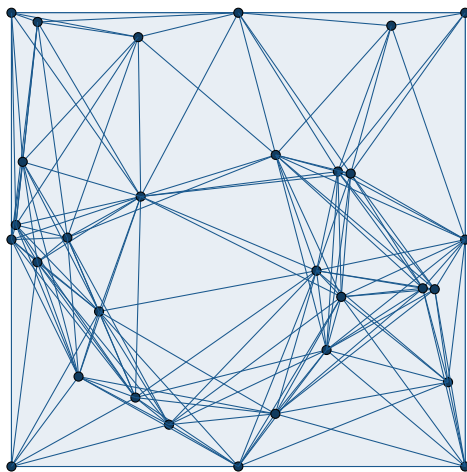


## Retrait des sommets

**Entrée** : simplexes,  
indices

- Par indice décroissant
- Tirage d'un sommet d'indice maximum.
- Après son retrait, si  $\beta_0 = 1$  et  $\beta_1 = 0$ , le retrait est confirmé. Sinon il est annulé et  $I(v) = -1$ .

**Sortie** : simplexes retirés



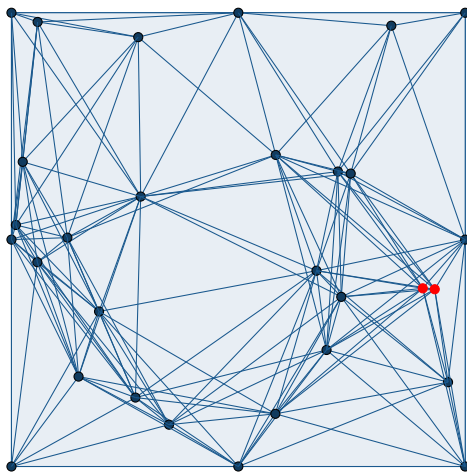


## Retrait des sommets

**Entrée** : simplexes,  
indices

- Par indice décroissant
- Tirage d'un sommet d'indice maximum.
- Après son retrait, si  $\beta_0 = 1$  et  $\beta_1 = 0$ , le retrait est confirmé. Sinon il est annulé et  $I(v) = -1$ .

**Sortie** : simplexes retirés

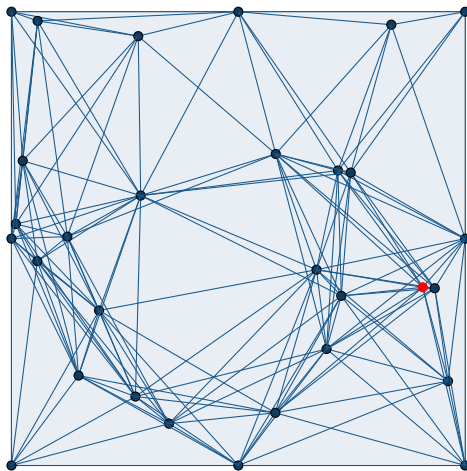


## Retrait des sommets

**Entrée** : simplexes,  
indices

- Par indice décroissant
- Tirage d'un sommet d'indice maximum.
- Après son retrait, si  $\beta_0 = 1$  et  $\beta_1 = 0$ , le retrait est confirmé. Sinon il est annulé et  $I(v) = -1$ .

**Sortie** : simplexes retirés

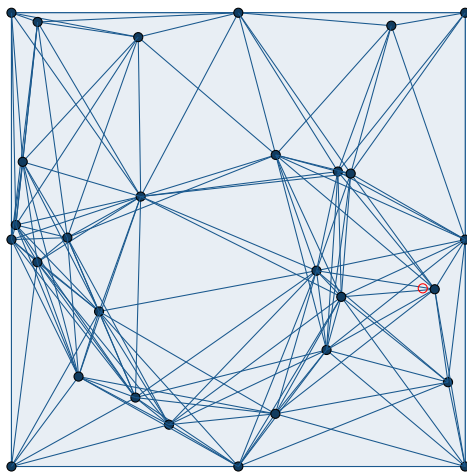


## Retrait des sommets

**Entrée** : simplexes,  
indices

- Par indice décroissant
- Tirage d'un sommet d'indice maximum.
- Après son retrait, si  $\beta_0 = 1$  et  $\beta_1 = 0$ , le retrait est confirmé. Sinon il est annulé et  $I(v) = -1$ .

**Sortie** : simplexes retirés

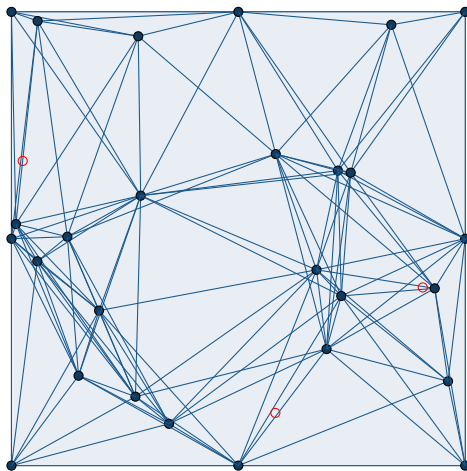


# Retrait des sommets

## Boucle

- Calcul des degrés et indices modifiés
- Retrait d'un sommet d'indice maximum  $I_{\max}$  qui convient
- Jusqu'à  $I_{\max} \leq 2$

Sortie : simplexes retirés

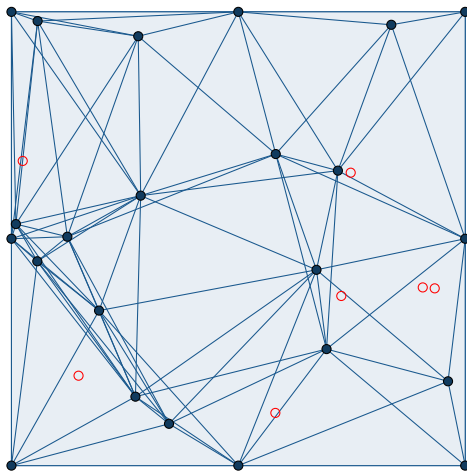


# Retrait des sommets

## Boucle

- Calcul des degrés et indices modifiés
- Retrait d'un sommet d'indice maximum  $I_{\max}$  qui convient
- Jusqu'à  $I_{\max} \leq 2$

Sortie : simplexes retirés

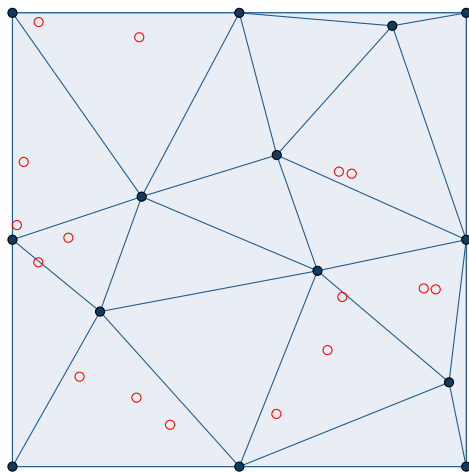


# Retrait des sommets

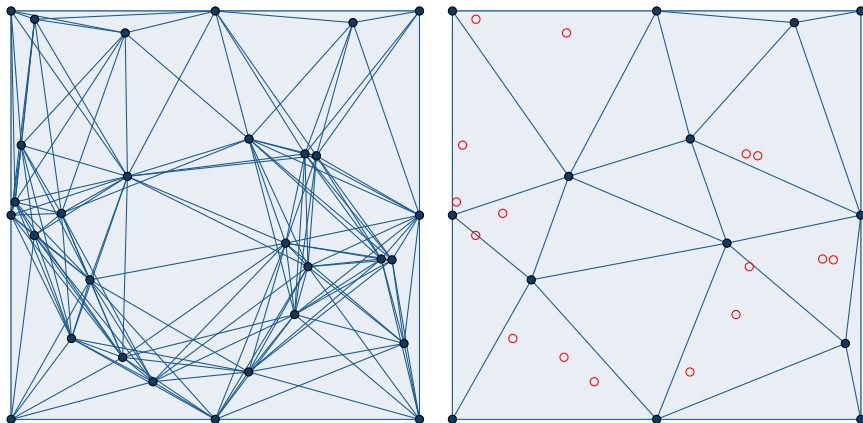
## Boucle

- Calcul des degrés et indices modifiés
- Retrait d'un sommet d'indice maximum  $I_{\max}$  qui convient
- Jusqu'à  $I_{\max} \leq 2$

Sortie : simplexes retirés



## Résultat final



## Propriétés

### Résultat maximal

Le nombre de sommets retirés est maximal : aucun sommet conservé ne peut être retiré sans compromettre la couverture.

### Bornes sur le nombre de sommets retirés

On note  $E_k$  l'ensemble des sommets d'indice  $k$ . Le nombre de sommets  $M$  retirés par l'algorithme est borné par

$$\sum_{k=3}^{l_{\max}} \mathbb{1}_{[E_k \neq \emptyset]} \leq M \leq \sum_{k=3}^{l_{\max}} |E_k|$$



# Complexité

## Complexité de l'algorithme

La complexité de l'algorithme sur le complexe simplicial de  $s_k$   $k$ -simplexes et  $n = s_0$  sommets, est majorée par  $n^2 s_2 + (n + s_2) \sum_{k=0}^{C-1} s_k$ , avec  $C$  la taille du plus grand simplexe.

Quand  $n$  tend vers l'infini, la complexité est  $O(n^3 2^n)$ .

## Complexité de l'implémentation du complexe

La complexité de l'implémentation des données est majorée par  $O(2^n)$  par rapport au nombre de sommets  $n$ .

## Cas du processus binomial (Decreusefond, Martins, V. [1])

- Le complexe de Rips-Vietoris ne dépend que du graphe
- Graphe sous-jacent : graphe géométrique aléatoire
- Hypothèses
  - Tore de côté  $a$  en dimension  $d$
  - Norme infinie
  - En posant  $\theta = \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^d$  alors  $\theta \leq \left(\frac{1}{2}\right)^d$

## Régimes de percolation

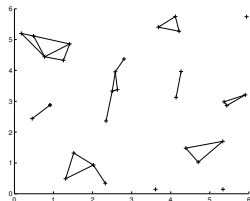


Figure: Régime sous-critique

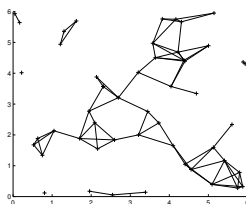


Figure: Régime critique

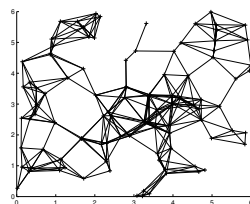


Figure: Régime surcritique

## Régime sous-critique

- $\theta = o\left(\frac{1}{n}\right)$
- Pour  $\eta > 0$ , on a  $\theta'_k = \frac{k^{\frac{1+\eta-d}{k-1}}}{n^{\frac{k}{k-1}}}$  et  $\theta_k = \frac{k^{-\frac{1+\eta+d}{k-1}}}{n^{\frac{k}{k-1}}}$ .
- Pour  $k \ll n$  et  $\theta'_k < \theta < \theta_{k+1}$ , on a asymptotiquement presque sûrement  $C = k$ .

## Complexité

Pour  $\theta'_k < \theta < \theta_{k+1}$ , la complexité de l'algorithme de couverture appliqué à un complexe de Rips-Vietoris sur un processus binomial sur le tore est en  $O(n^4)$ .

## Régime critique

- $\theta \sim \frac{1}{n}$
- Pour  $\eta > 0$ , on a asymptotiquement presque sûrement  $(\ln n)^{1-\eta} < C < \ln n$ .

### Complexité

La complexité de l'algorithme de couverture appliqué à un complexe de Rips-Vietoris sur un processus binomial sur le tore est en  $O(n^4 \ln n)$ .

## Régime surcritique

- $\frac{1}{n} = o(\theta)$
- $C$  croît asymptotiquement presque sûrement en  $n\theta$ .

### Complexité

La complexité de l'algorithme de couverture appliqué à un complexe de Rips-Vietoris sur un processus binomial sur le tore est en  $O(n^3 2^n)$ .

# Plan

- 1 Représentation des réseaux de capteurs
- 2 Algorithme de réduction
  - Problématique
  - Principe
  - Complexité
- 3 Applications aux réseaux cellulaires
  - Planification automatique des fréquences
  - Économie d'énergie en heures creuses
  - Rétablissement après un désastre
- 4 Conclusion

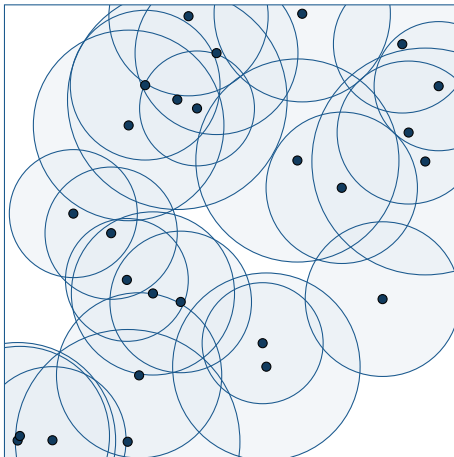
# Planification automatique des fréquences

- Allocation de fréquences
  - Une fréquence à chaque noeud
- Interférences
  - Co-canal
  - Sur une distance donnée
- Objectif
  - Utilisation homogène des ressources



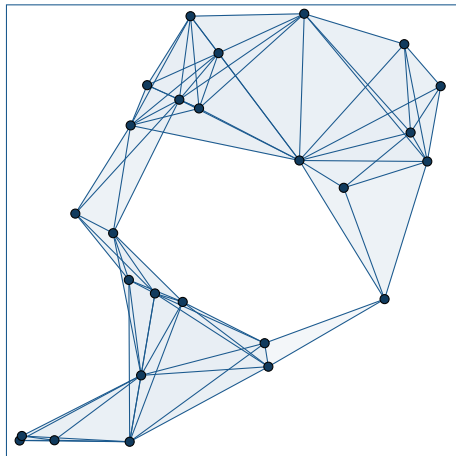
## Représentation

- Réseau cellulaire
- Différents rayons de communication
- Information de densité



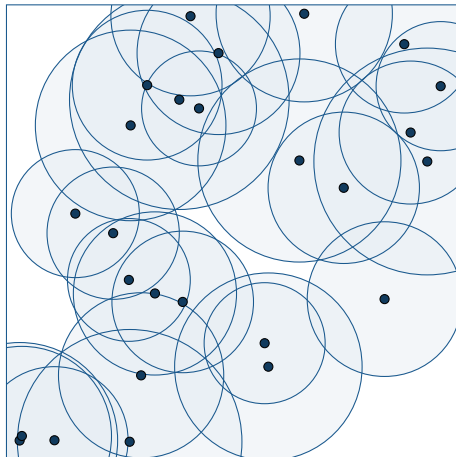
## Représentation

- Réseau cellulaire
- Différents rayons de communication
- Information de densité



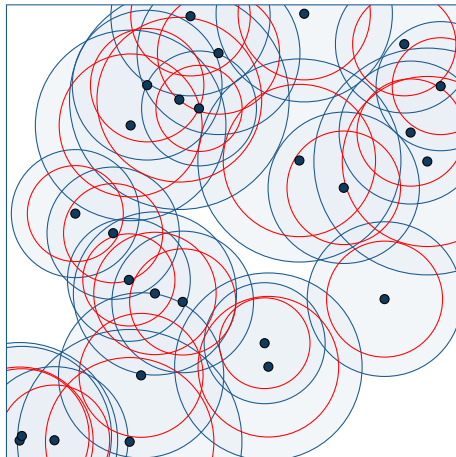
# Interférences

- Interférences co-canal
- Rayon de rejet
- Graphe d'interférences



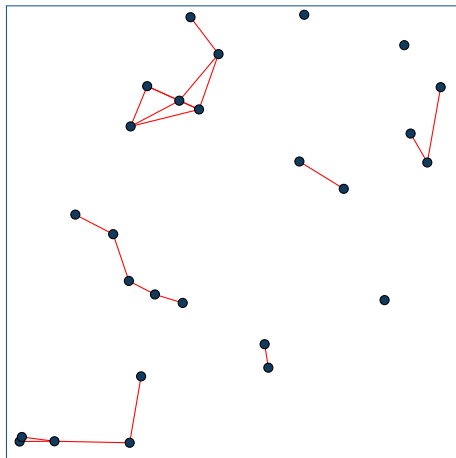
# Interférences

- Interférences co-canal
- Rayon de rejet
- Graphe d'interférences



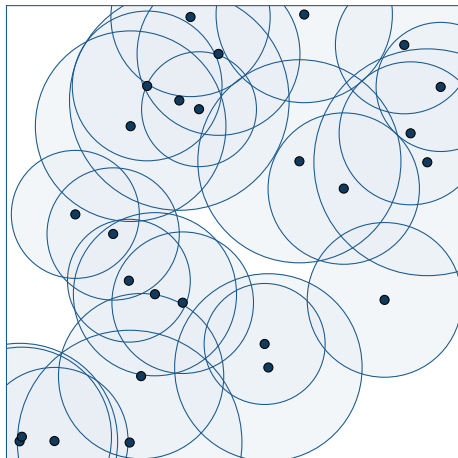
## Interférences

- Interférences co-canal
- Rayon de rejet
- Graphe d'interférences



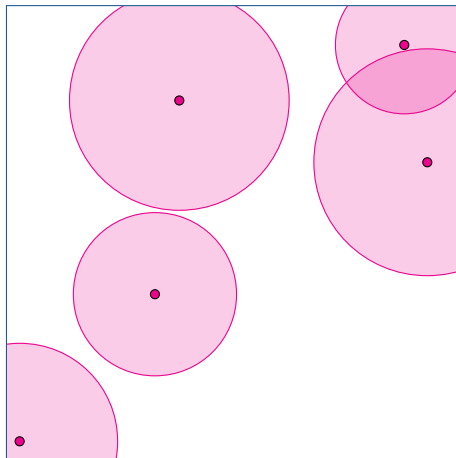
# Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



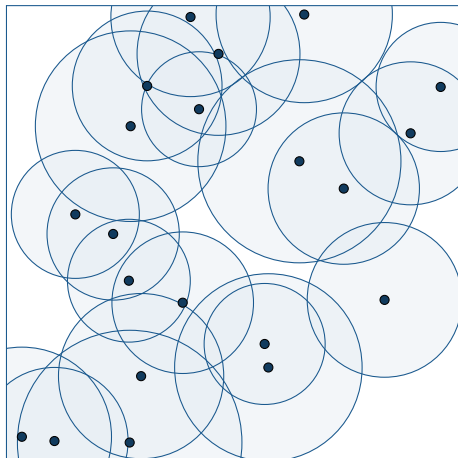
## Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



## Fréquences

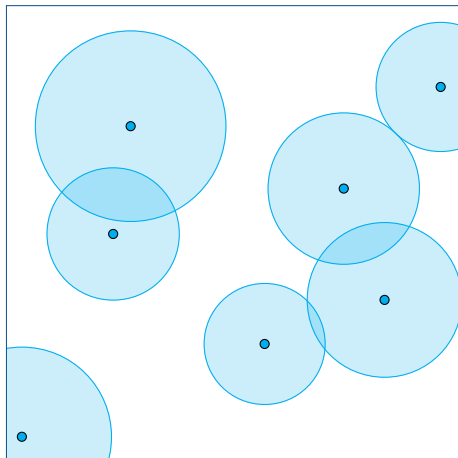
- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée





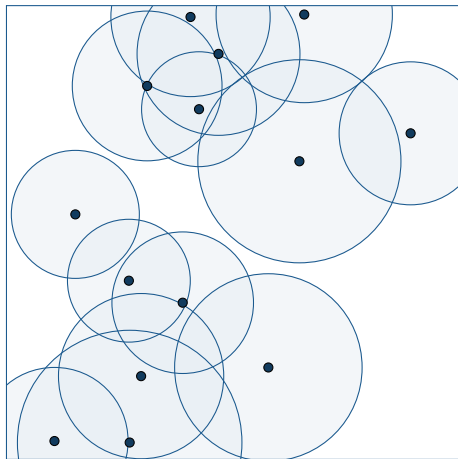
# Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



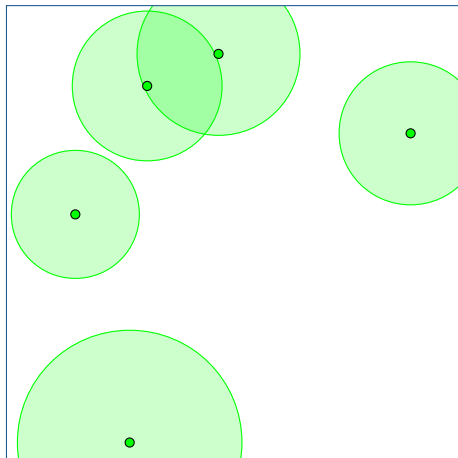
# Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



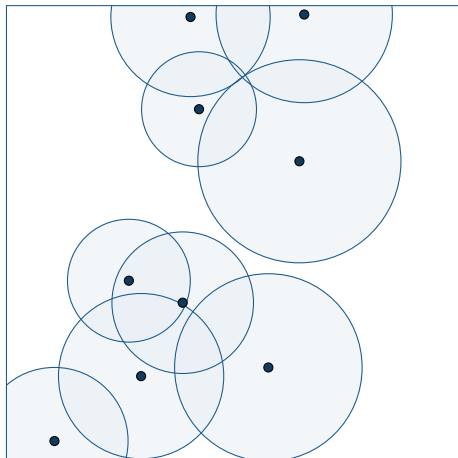
## Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



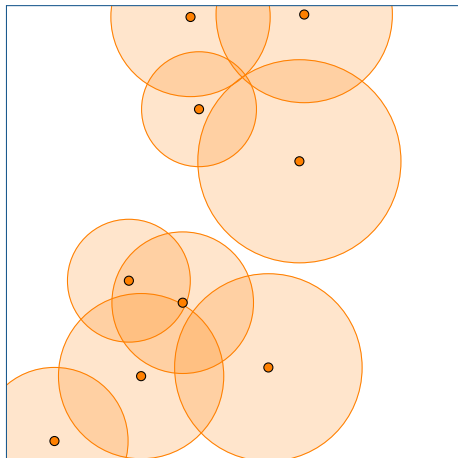
# Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



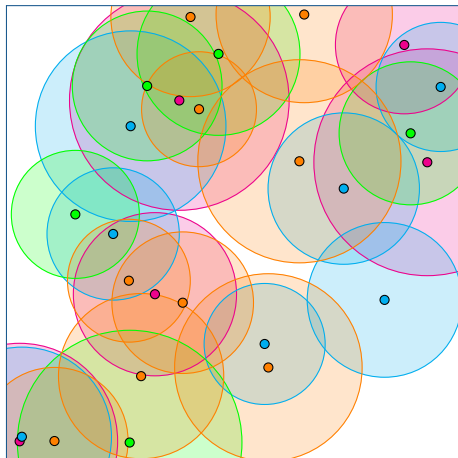
# Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée



## Fréquences

- Algorithme de réduction pour chaque fréquence
  - Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'interférences pour cette fréquence
  - Sans prendre en compte la topologie
- Jusqu'à ce que tous les noeuds aient une fréquence allouée

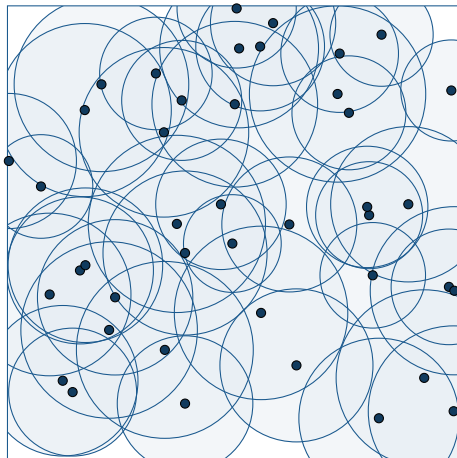


## Économie d'énergie en heures creuses

- Mettre certains noeuds en veille
  - Tout en conservant la topologie
  - En prenant en compte un trafic donné
- Trafic
  - Groupes de trafic
  - Nombre minimum de noeuds par groupe

# Représentation

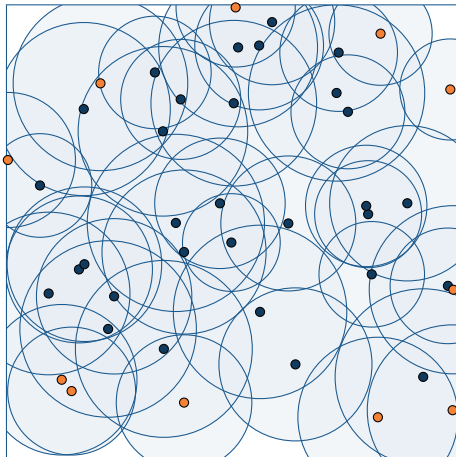
- Réseau cellulaire
- Rayons de couverture
  - Différents
  - Variables
- Topologie
  - Bordure = enveloppe convexe
  - $\beta_0 = 1$
  - $\beta_1 = 0$





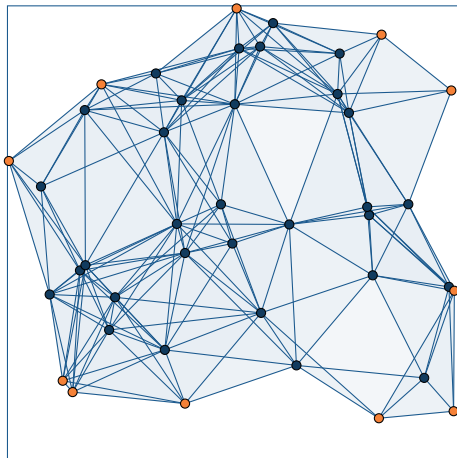
# Représentation

- Réseau cellulaire
- Rayons de couverture
  - Différents
  - Variables
- Topologie
  - Bordure = enveloppe convexe
  - $\beta_0 = 1$
  - $\beta_1 = 0$



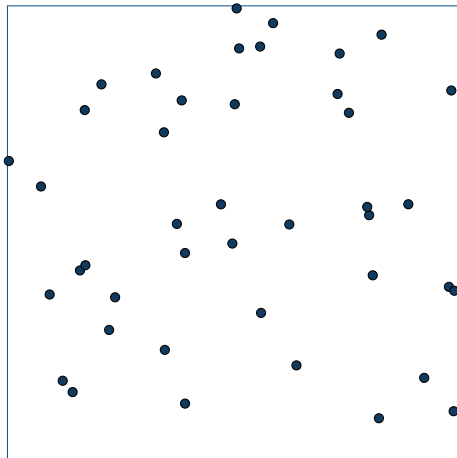
# Représentation

- Réseau cellulaire
- Rayons de couverture
  - Différents
  - Variables
- Topologie
  - Bordure = enveloppe convexe
  - $\beta_0 = 1$
  - $\beta_1 = 0$



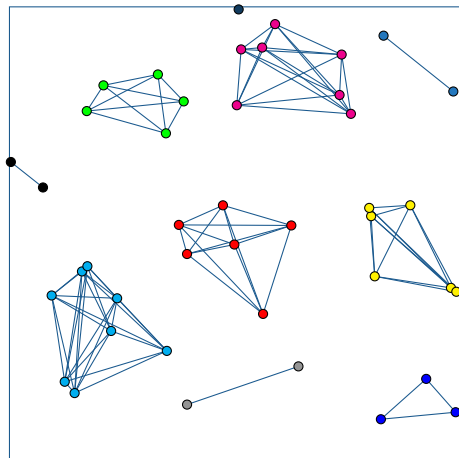
## Groupes de trafic

- Un groupe de trafic = un simplexe
- Un noeud est dans un seul groupe de trafic
- Un nombre de noeuds minimum à conserver par groupe



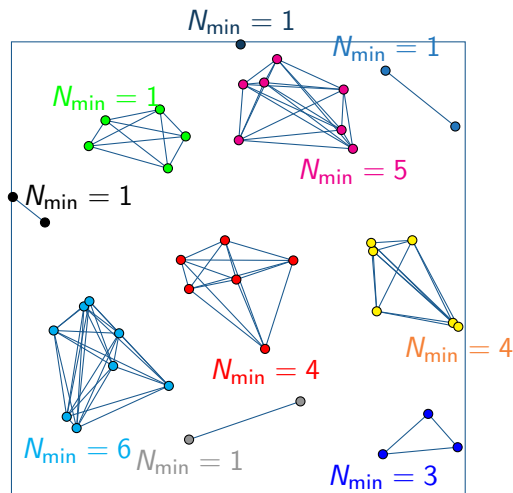
## Groupes de trafic

- Un groupe de trafic = un simplexe
- Un noeud est dans un seul groupe de trafic
- Un nombre de noeuds minimum à conserver par groupe



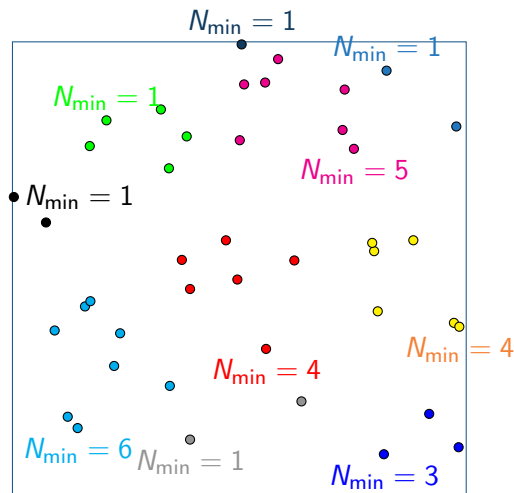
## Groupes de trafic

- Un groupe de trafic = un simplexe
- Un noeud est dans un seul groupe de trafic
- Un nombre de noeuds minimum à conserver par groupe



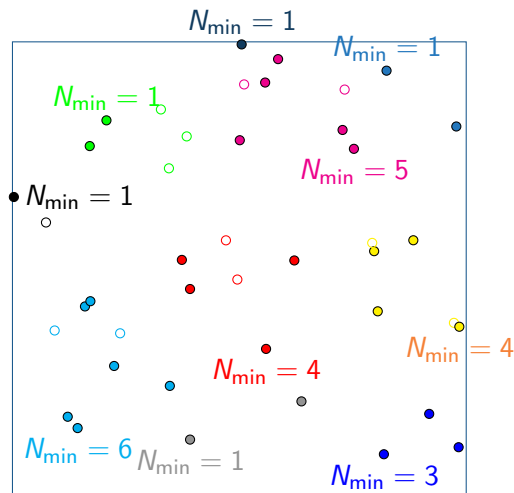
## Réseau optimisé

- Algorithme de réduction
  - Jusqu'au nombre de noeuds minimum dans chaque groupe
  - Ou jusqu'à modification de la topologie
- Diminution des rayons de couverture



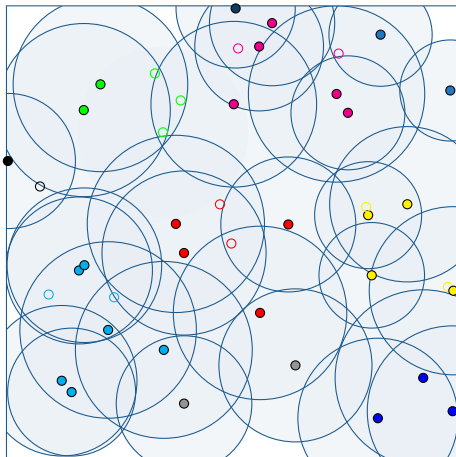
## Réseau optimisé

- Algorithme de réduction
  - Jusqu'au nombre de noeuds minimum dans chaque groupe
  - Ou jusqu'à modification de la topologie
- Diminution des rayons de couverture



## Réseau optimisé

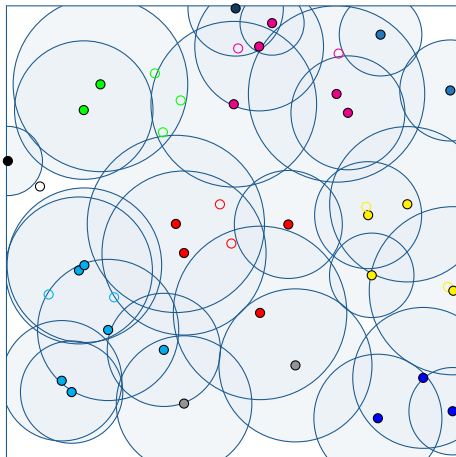
- Algorithme de réduction
  - Jusqu'au nombre de noeuds minimum dans chaque groupe
  - Ou jusqu'à modification de la topologie
- Diminution des rayons de couverture





## Réseau optimisé

- Algorithme de réduction
  - Jusqu'au nombre de noeuds minimum dans chaque groupe
  - Ou jusqu'à modification de la topologie
- Diminution des rayons de couverture



## Rétablissement après un désastre (V., Flint, Decreusefond, Martins [3])

- Réseau cellulaire endommagé
  - Plusieurs composantes connexes
  - Trous de couverture
- Ajout de nouveaux noeuds virtuellement
  - Aléatoirement
  - En surnombre
  - Pour recoller et colmater le réseau
- Réduire le nombre de noeuds ajoutés jusqu'à atteindre un résultat optimal

# Méthode d'ajout des noeuds virtuels

- Contraintes
  - Suffisamment de noeuds pour rétablir le réseau
  - Nombre raisonnable
- Méthodes
  - Grille
  - Tirage uniforme
  - Avec répulsion

## Méthode d'ajout des noeuds virtuels

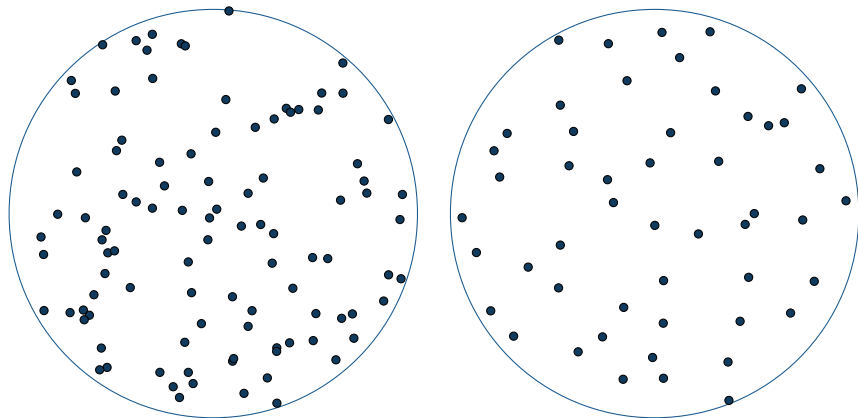


Figure: Processus de Poisson et processus déterminantal de Ginibre

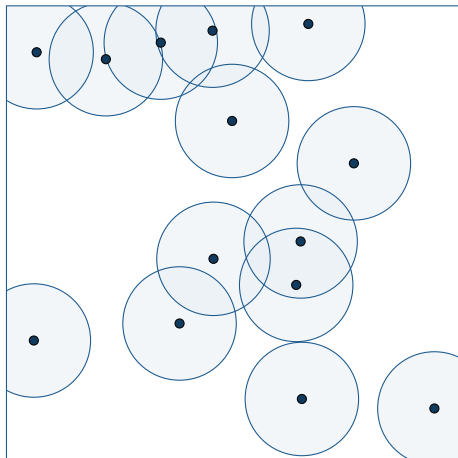
## Méthode d'ajout des noeuds virtuels

- Contraintes
  - Suffisamment de noeuds pour rétablir le réseau
  - Nombre raisonnable
- Méthodes
  - Grille
  - Tirage uniforme
  - Avec répulsion

Pourcentage couverture initiale	20%	40%	60%	80%
Grille	9.00	9.00	9.00	9.00
Uniforme	32.76	29.18	23.71	16.46
Avec répulsion (Ginibre)	14.07	12.52	9.67	5.73

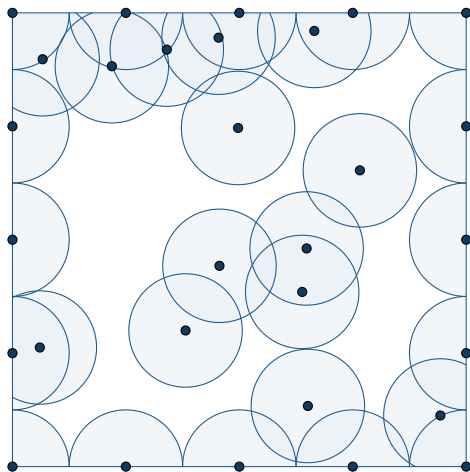
## Réseau endommagé

- Une ou plusieurs composantes connexes
- Trous de couverture
- Bordure virtuelle de la zone à couvrir



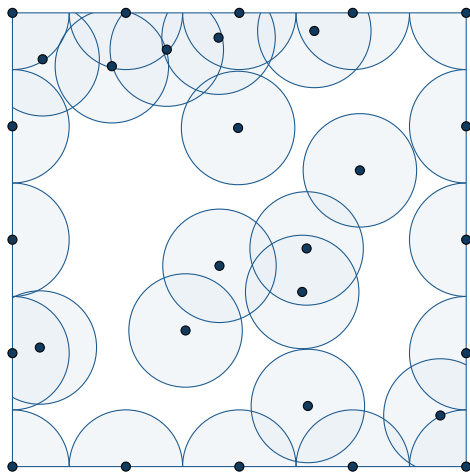
# Réseau endommagé

- Une ou plusieurs composantes connexes
- Trous de couverture
- Bordure virtuelle de la zone à couvrir



## Ajout des noeuds virtuels

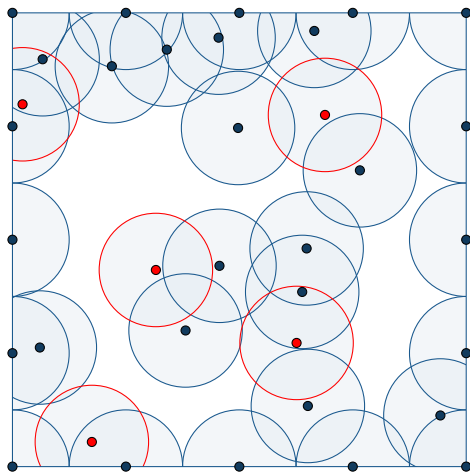
- Processus déterminantal de Ginibre
- Prend en compte
  - le nombre de noeuds présents
  - et leurs positions





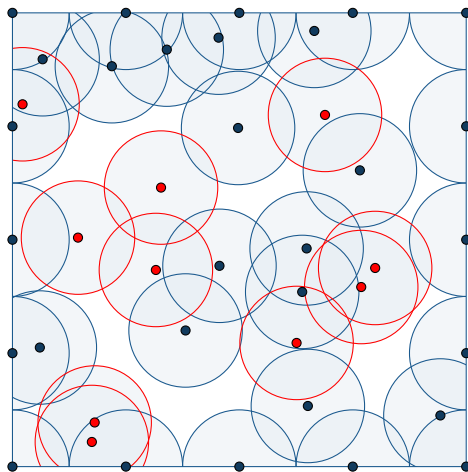
# Ajout des noeuds virtuels

- Processus déterminantal de Ginibre
- Prend en compte
  - le nombre de noeuds présents
  - et leurs positions



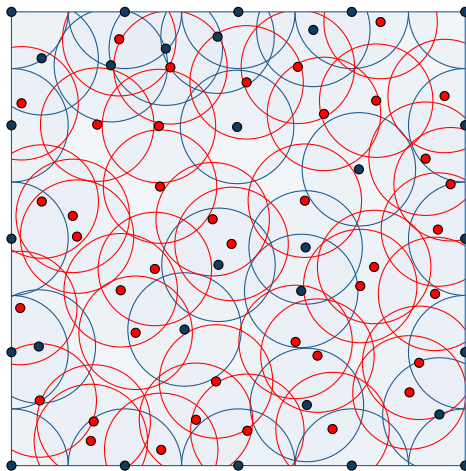
# Ajout des noeuds virtuels

- Processus déterminantal de Ginibre
- Prend en compte
  - le nombre de noeuds présents
  - et leurs positions



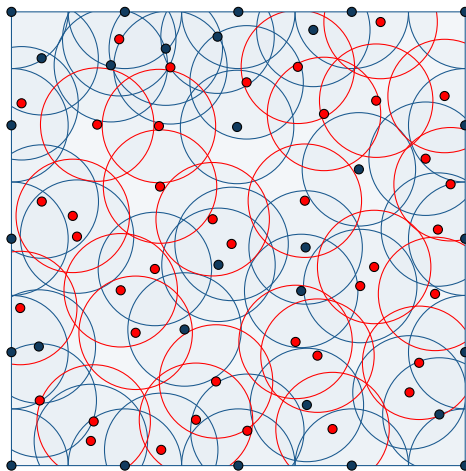
# Ajout des noeuds virtuels

- Processus déterminantal de Ginibre
- Prend en compte
  - le nombre de noeuds présents
  - et leurs positions



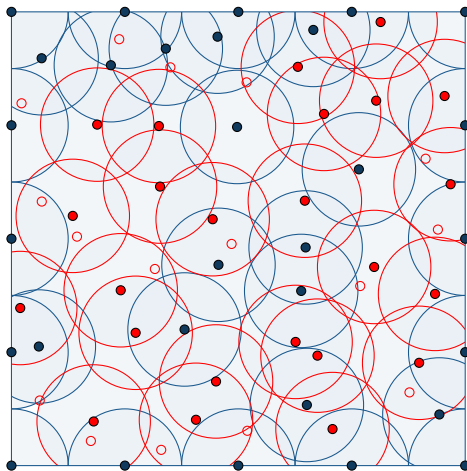
# Réseau restauré

- Algorithme de réduction
  - Seuls les noeuds virtuels peuvent être enlevés
  - Réduit le nombre de noeuds à ajouter



# Réseau restauré

- Algorithme de réduction
  - Seuls les noeuds virtuels peuvent être enlevés
  - Réduit le nombre de noeuds à ajouter



## Couverture robuste

- Comparaison grille/Ginibre
- Perturbation gaussienne
- Probabilité que la couverture soit inchangée après la perturbation

Pourcentage couverture initiale	20%	40%	60%	80%
Grille	40.8%	47.7%	61.0%	69.3%
Ginibre	50.9%	58.1%	67.9%	75.3%

# Conclusion

- Algorithme de réduction de complexes simpliciaux
- Economie d'énergie dans les réseaux de capteurs
- Configuration et optimisation des réseaux cellulaires
- Rétablissement d'un réseau cellulaire après un désastre

# Perspectives

- Réseaux autonomes
- Décentralisation de l'algorithme
- Complexité de la signalisation



## Publications

- Anaïs Vergne, Laurent Decreasefond and Philippe Martins. *Reduction algorithm for simplicial complexes*. In IEEE INFOCOM, Turin, Italy, 14-19 April 2013, pp. 475-479.
- Anaïs Vergne, Laurent Decreasefond and Philippe Martins. *Clique number of random geometric graphs*. Submitted, 2013.
- Anaïs Vergne, Ian Flint, Laurent Decreasefond and Philippe Martins. *Homology based algorithm for disaster recovery in wireless networks*. Submitted, 2013.
- Laurent Decreasefond, Eduardo Ferraz, Hugues Randriambololona and Anaïs Vergne. *Simplicial Homology of Random Configurations*. In Advances in Applied Probability 46, 2 (2014) 1-20.
- Laurent Decreasefond, Ian Flint and Anaïs Vergne. *Efficient simulation of the Ginibre point process*. Submitted, 2013.
- Feng Yan, Anaïs Vergne, Laurent Decreasefond and Philippe Martins. *Homology-based Distributed Coverage Hole Detection in Wireless Sensor Networks*. Submitted, 2013.

Merci pour votre attention.

# Bibliography

- [1] Laurent Decreasefond, Philippe Martins, and Anaïs Vergne. Clique number of random geometric graphs. [hal-00864303](#), March 2013.
- [2] A. Vergne, L. Decreasefond, and P. Martins. Reduction algorithm for simplicial complexes. In *INFOCOM, 2013 Proceedings IEEE*, pages 475–479, 2013.
- [3] Anaïs Vergne, Ian Flint, Laurent Decreasefond, and Philippe Martins. Homology based algorithm for disaster recovery in wireless networks. [hal-00800520](#), March 2013.