



Les Bases de l'Imagerie Radar à Synthèse d'Ouverture

Florence Tupin, Jean Marie Nicolas

<jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr>



Table des matières

1	Les principes du RSO	4
1.1	Introduction	5
1.2	Principes du Radar	6
1.3	La résolution en distance et le filtrage adapté	9
1.3.1	Hypothèse de linéarité	9
1.3.2	La mesure de temps de vol et les contraintes du Radar	9
1.3.3	Le principe du filtrage adapté : cas de la rampe modulée linéairement en fréquence	11
1.3.4	Autres formes d'onde	13
1.3.5	Conclusions sur l'analyse en distance	14
1.4	Lois d'antenne	14
1.4.1	Principes en 2-D	14
1.4.2	La synthèse	19
1.5	Le traitement des données RSO : Mise en œuvre	23
1.5.1	Principes de base	23
1.5.2	Compression en distance	24
1.5.3	Méthodes classiques de synthèse (mode <i>Stripmap</i>)	24
1.5.4	Un exemple sur des données ERS	25
1.5.5	Caractéristiques globales des données synthétisées	27
1.6	Les différents modes d'acquisition et d'images	27
1.7	Géométrie des images RSO	28
1.7.1	Principe : hypothèse de sol plat	28
1.7.2	Variation de l'échantillonnage en fonction de la pente locale	32
1.7.3	Ombre et repliement	32
1.7.4	Cas d'école : structure pyramidale	32
1.7.5	Comparaison optique radar	33
2	Le traitement des images RSO	36
2.1	Que voit-on sur une image RSO	37
2.1.1	Analyse d'une image RSO	37
2.1.2	Le chatoiement	37
2.2	Le chatoiement pleinement développé en imagerie RSO [12]	42
2.2.1	Les lois de chatoiement (sol homogène)	43
2.2.2	Les lois de chatoiement (sol non-homogène)	49
2.3	Le filtrage des images RSO	51
2.3.1	Les filtres non spécifiques aux lois d'image	52
2.3.2	Les filtres avec hypothèses sur l'image	55
2.3.3	Le filtrage de données dans \mathbb{C}	61
2.3.4	Le filtrage multi-temporel	63
3	L'interférométrie RSO	66
3.1	Introduction	67
3.2	Formalisation de l'interférométrie [1]	67
3.2.1	Formalisation de l'interférométrie "optique" (en géométrie "sol")	67
3.2.2	Formalisation en géométrie "radar"	70
3.3	Statistiques des images INSAR [12]	71
3.3.1	Modélisation des réponses	71
3.3.2	Les lois des interférogrammes	73

3.4	La construction d'un interférogramme	79
3.4.1	Principes	79
3.4.2	Limitations	79
3.4.3	Interférométrie différentielle	83
3.5	Conclusions	85
4	Le traitement des données polarimétriques	86
4.1	Outils de description des ondes polarisées	87
4.1.1	L'ellipse dans tous ses états	87
4.1.2	Vecteurs de Pauli et quaternions	91
4.1.3	Les quaternions	92
4.2	Description des ondes totalement polarisées	93
4.2.1	Représentation par le vecteur de Jones	93
4.2.2	Représentation par le vecteur de Stokes	95
4.3	Description des ondes partiellement polarisées	97
4.3.1	Matrice de covariance (vecteur de Jones)	97
4.3.2	Vecteur de Stokes	98
4.4	Matrice de rétrodiffusion complexe	98
4.4.1	Matrice de Jones	98
4.4.2	Matrice de Sinclair (rétrodiffusion complexe), matrice de Mueller	99
4.4.3	Modèles de cibles déterministes	99
4.4.4	Ondes partiellement polarisées	102
4.5	Utilisation des matrices de covariance et de cohérence	103
4.5.1	Matrice de variance-covariance	103
4.5.2	Matrice de cohérence : méthode H- α	103
A	Les images et leurs caractéristiques	105
A.1	Types de données	106
A.2	Apodisation	106
A.3	Rééchantillonnage des données SLC	107
A.4	Orientation	107
A.4.1	Orientation de la trace	107
A.4.2	Orientation de la fauchée	108
A.5	Les effets de la rotondité de la Terre	110
A.5.1	Hypothèse de sol sphérique	110
A.5.2	Pixels de l'image et position sur le géoïde terrestre	113
B	Caractérisation des cibles : l'approche SVA	114
B.1	La méthode SVA (Spatially Variant Apodisation) et les "Cosinus sur piedestal"	115
B.2	SVA en 1-D	115
B.3	SVA 2-D	116
B.3.1	SVA filtre "quinconce"	117
B.3.2	SVA filtre "produit"	119
B.3.3	Allure du paysage d'énergie	121
B.4	Expérimentations	121
B.4.1	Filtrage SVA standard	123
B.4.2	Filtrage SVA modifié	124
B.5	Conclusion	124
C	Les statistiques de Mellin	126
C.1	Introduction	127
C.1.1	Rappels	127
C.1.2	Lois inverses	127
C.1.3	Convolution de Mellin, produits de variables aléatoires, rapports de variables aléatoires	128
C.1.4	Lois en intensité, lois en amplitude	129
C.1.5	Chatoiement et loi Gamma	130
C.1.6	La boîte à outils : loi Gamma, loi Gamma Inverse et loi lognormale	131
C.2	Lois statistiques de produit : données en intensité	132
C.2.1	Produit de deux lois lognormale	132
C.2.2	Produit de deux lois Gamma : la loi \mathcal{K}	133

C.2.3	Produit d'une loi Gamma et d'une loi Gamma inverse : la loi de Fisher	133
	Licence de droits d'usage	136

Chapitre 1

Les principes du RSO



1.1 Introduction

Depuis les premières expérimentations par Christian Hülsmeier en 1902 sur le pont de Cologne, le Radar (Radio Detection And Ranging) a rapidement conquis le monde scientifique et industriel, tant par ses exigences scientifiques que par ses réalisations concrètes. Ses premières applications ont été orientées dans le sens de la détection, avant d'être utilisé en tant que système imageur.

Les premières applications du Radar en tant que système imageur ont été effectuées dans le cadre du RAR (Real Aperture Radar), ou SLAR (Side Looking Aperture Radar dans les années 50. Embarqué sur un aéronef ou un satellite, le RAR utilise le mouvement du porteur pour obtenir, grâce à des acquisitions successives, une image de la zone étudiée. En fonction des contraintes de dimension, le RAR est malheureusement limité en résolution par les fondements même des lois de la diffraction et des longueurs d'ondes utilisées. Pour contourner ce problème sur des systèmes embarqués, Carl Wiley en 1951 a établi de manière assez visionnaire le principe du radar à antenne synthétique (RSO), appelé dans le monde anglosaxon *Synthetic Array Radar* (SAR).

Les premières réalisations ont été fondées sur un traitement optique et un enregistrement sur film, principalement embarqués sur des avions [8, 4] à la fin des années 50. A la fin des années 60 apparut le premier corrélateur numérique, et dès le début des années 70 un système temps réel.

Dans le domaine spatial, le JPL testa un système SAR sur des fusées expérimentale dès 1962, les travaux ultérieurs permettant d'embarquer un SAR sur Apollo 17 (décembre 1972, Apollo Lunar Sounder Experiment), puis de placer en 1978 sur orbite le satellite SEASAT, qui fut le précurseur dans ce domaine d'une longue série internationale (Europe avec ERS et Envisat, Canada avec Radarsat, Japon avec JERS).

Un des points les plus intéressants du Radar est qu'il associe deux grandes familles de traitement :

- Le traitement du Signal, qui permet, par l'analyse du signal reçu, de conclure à la présence éventuelle d'objets sources d'échos. Ce premier point sera abordé dans le paragraphe 1.2 et posera les fondements des méthodes permettant d'assurer la meilleure séparation temporelle possible entre deux échos, et donc la meilleure séparation spatiale possible. Dans la mesure où l'on peut considérer le Radar comme ponctuel (eu égard aux autres dimensions de la scène analysée) le Radar permet alors de séparer différentes cibles (ou sources d'échos) dans la mesure où celles-ci sont situées à la surface de sphères isochrones différentes centrées sur ce même Radar.
- Le traitement d'antenne qui s'appuie sur les principes fondamentaux de l'émission et de la propagation d'ondes électromagnétiques et qui sera abordé au paragraphe 1.4. C'est grâce au traitement d'antenne que l'on pourra effectuer une discrimination spatiale des sources (ou des échos) à la surface de la sphère isochrone.

C'est l'association de ces deux familles qui permettent alors de passer à la synthèse d'ouverture telle qu'elle est pratiquée quotidiennement en télédétection satellitaire et qui en particulier permet de s'affranchir des contraintes technologiques de dimensionnement d'antenne.

Dans ce chapitre, nous prendrons une grande partie de nos exemples d'application dans le cadre des capteurs d'ERS et de Terrasar-X et dont les caractéristiques essentielles sont reprises dans le tableau 1.1. Insistons tout de suite sur les points suivants :

- Les images PRI (PRecision Image) sont des données en amplitude fournies par les agences spatiales dont les dimensions pixelliques s'apparentent à celles des capteurs optiques satellitaires des années 90 comme Landsat ou SPOT. Aussi les dimensions de l'antenne tout comme la forme d'onde utilisée sont dictées par cette finalité. Dans le cas d'ERS, l'emport d'une antenne de $1\text{m} \times 10\text{m}$ dans une charge utile sur orbite ne pose pas de problème majeur (hormis lors du déploiement de l'antenne, qui est une phase délicate). Pour ERS, l'électronique de bord correspond à une onde centimétrique quasi monochromatique (échantillonnage correspondant à une bande utile de 18 MHz sur 5 bits utiles) qui n'a pas posé de problème majeur à l'époque.
- La fin des années 2000 voit une éclosion de capteurs optiques commerciaux métriques, voire submétriques. La mise en œuvre de plateformes RSO satellitaires de résolution métrique est alors un nouvel enjeu, tant sur le plan du traitement que sur celui de l'électronique. Terrasar-X a présenté un certain nombre d'innovations marquantes (comme le fait d'emporter une antenne non déployable). De plus, grâce à des plateformes intertielles performantes et des capteurs GPS de haute précision, ces plateformes ont une trajectographie extrêmement bien connue : la localisation des pixels d'une image est désormais un problème presque totalement réglé.

Nous soulignerons à l'occasion dans ce chapitre les endroits où le passage à ce type de données pourrait poser des problèmes tant sur le traitement proprement dit que sur celui de l'acquisition.

		AMI(ERS)	Terrasar-X
Altitude	H	785 Km	515 km
Vitesse du satellite	V_s	7466 m/s	7610 m/s
Incidence moyenne (sol)	θ	23°	
Distance moyenne	R	880 Km	
Fréquence centrale de l'impulsion	ν	5.3 GHz	9.65 GHz
Longueur d'onde	λ	5.66 cm	3.1 cm
Durée du pulse	T	37.12 μ sec	
Fréquence de répétition de l'impulsion (PRF)	$\frac{1}{T_{PRF}}$	1640-1720 Hz	3815 Hz
	$L_{PRF} = V_s T_{PRF}$	4.34-4.55 m	1.85 m
	K	$0.41889 \cdot 10^{12}$	
Excursion en fréquence de l'impulsion	KT	15.55 MHz	100 MHz
Fréquence d'échantillonnage du signal	F_{ech}	18.96 MHz	109.9 MHz
Dimensions de l'antenne :	L	10 m	4.8 m
	l	1 m	0.8 m
Résolution azimutale	δ_a	5.00 m	2.00 m
Résolution radiale	δ_r	9.65 m	1.4 m
Dimension pixel (image PRI)	$\Delta_{PRI,x} = \Delta_{PRI,y}$	12.5 m	
Dimension pixel (image SLC)	$\Delta_{PRI,x}$	7.90 m	1.30 m
	$\Delta_{PRI,y}$	4.5 m	1.85 m

TAB. 1.1 – Caractéristiques principales du capteur AMI (Active Microwave Instrument) d'ERS-1 et ERS-2 et du capteur de Terrasar-X (pour une configuration StripMap donnée). Le terme PRI (PRrecision Image) est traditionnellement dédié à des images multivues fournies par les agences spatiales.

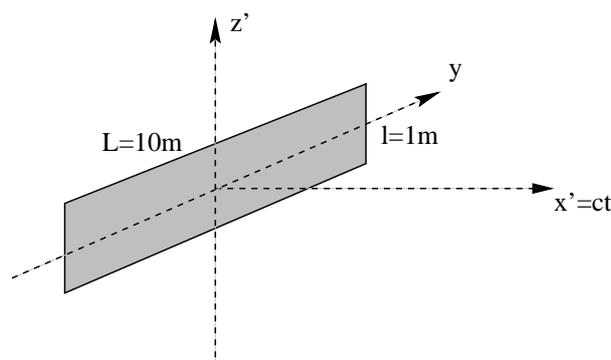


Fig. 1.1 – Antenne plane du capteur AMI d'ERS. L'axe Oy est parallèle à la trajectoire du satellite.

1.2 Principes du Radar

Le Radar (Radio Detection And Ranging) est une technique utilisant des ondes électromagnétiques émises par une antenne et reçues généralement par la même antenne¹. La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques c pouvant raisonnablement être considérée comme constante dans le milieu de propagation, toute mesure de temps de vol t peut se traduire en mesure de distance d par la relation :

$$d = ct$$

En pratique, si l'onde électromagnétique est rétrodiffusée par un objet, on aura une information de la position de cet objet en analysant le temps aller-retour entre l'émission de l'onde et la réception de l'onde rétrodiffusée. Si l'objet rétrodiffusant se trouve à une distance r , on a alors :

$$r = \frac{ct}{2} \quad (1.1)$$

Ce principe est à la base des radars, mais aussi de tout système d'écholocation tels ceux que l'on peut trouver en imagerie ultrasonore et en biologie animale (chauve souris, dauphin, marsouin, ...).

¹C'est le principe du radar monostatique, qui sera le seul étudié ici. Les systèmes bistatiques augmentent la difficulté de la modélisation puisque la non isotropie de la rétrodiffusion des cibles doit alors être prise en compte

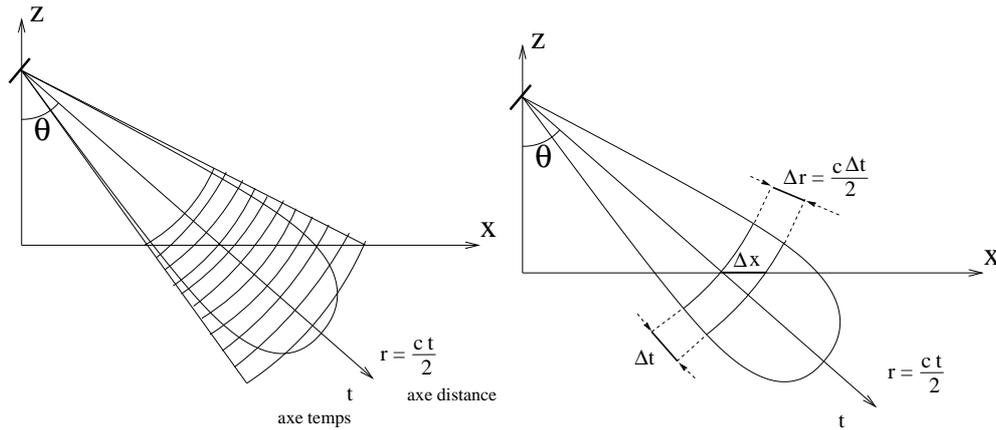


FIG. 1.2 – A gauche : Le radar émet une onde dont l'énergie est localisée dans le lobe d'antenne. Si l'on considère les isochrones correspondant à l'antenne, celles-ci sont des sphères puisque la célérité des ondes est supposée constante, et donc des cercles dans le plan Oxz. Sur cette figure, l'antenne est placée à une altitude h et émet une onde selon l'angle d'émission θ (qui est aussi l'angle d'incidence au sol étant donnée l'approximation de Terre plate). A droite : étude de l'écholocation. Le signal reçu par l'antenne est échantillonné dans le domaine temporel. A un échantillon temporel de durée Δt (case temps) correspond un échantillon spatial $\Delta r = \frac{c\Delta t}{2}$ (case distance) puisque la célérité est supposée constante et puisqu'il faut prendre en compte le trajet aller-retour. On suppose aussi que les seuls objets susceptibles de rétrodiffuser l'onde incidente sont sur le plan horizontal (hypothèse de Terre plate) : une case distance correspond alors à une case sol, de dimension $\Delta x = \frac{\Delta r}{\sin\theta}$.

Un système imageur Radar utilisera donc ce principe d'écholocation et aura pour objectif de cartographier avec la meilleure résolution possible la position des rétrodiffuseurs. Deux aspects sont à analyser :

- la résolution du système : c'est à dire la capacité à distinguer (résoudre) deux objets distincts situés en deux positions voisines. La résolution est dictée par les lois de la physique et par le dimensionnement du capteur (dimensions de l'antenne).
- l'échantillonnage des données : c'est à dire la manière dont la numérisation s'effectue temporellement et spatialement. Cet aspect est purement "signal" et est directement lié aux contraintes de numérisation.

Analysons tout d'abord les aspects d'échantillonnage qui est à la base de toute étude sur un système radar numérique.

- L'échantillonnage en temps est lié au convertisseur analogique-numérique qui transcrit le signal analogique reçu par l'antenne (en pratique une tension) en signal numérique. La fréquence d'échantillonnage du convertisseur va donc imposer une durée aux échantillons. Dans ce domaine temporel, on parle souvent de **case temps**, de durée Δt . Vu de l'antenne, une case temps est donc défini par deux isochrones qui définissent dans l'espace un volume isochrone. Tout les objets rétrodiffusants appartenant à ce volume appartiendront donc à la même case temps.
- L'équation 1.1 permet de lier l'analyse temporelle et l'analyse spatiale. On peut alors parler indifféremment de **case temps** Δt et de **case distance** Δr ., liées par la relation :

$$\Delta r = \frac{c\Delta t}{2}$$

- Le radar émet une onde dont l'incidence locale au sol est θ . A une case distance correspond alors une **case sol** Δx telle que :

$$\Delta x = \frac{\Delta r}{\sin\theta}$$

Case temps, case distance et case sol sont donc des résultats liés à l'échantillonnage : ce sont ces grandeurs qui seront utilisées en pratique lors du traitement des images Radar. Cependant, l'objectif d'un système imageur est de distinguer des objets voisins : il faut alors se pencher sur la résolution d'un tel système.

- sur l'axe temporel, deux échos seront séparables s'ils sont séparés par un intervalle de temps appelé résolution temporelle et notée δt .
- A cette résolution temporelle peut être associée la résolution spatiale δr par la relation :

$$\delta r = \frac{c\delta t}{2}$$

– en se plaçant sur le sol, on aura enfin la résolution sol δx telle que :

$$\delta x = \frac{\delta r}{\sin \theta} = \frac{c \delta t}{2 \sin \theta}$$

La résolution est dictée par les lois de la physique. Selon l'axe temporel, la capacité à séparer deux signaux de type échographique est principalement liée à la durée du signal émis. Nous verrons qu'en pratique, pour les système RSO, c'est la bande passante B du signal émis qui dicte la résolution. On aura alors des exigences sur l'échantillonnage puisque, pour vérifier Shannon, on devra avoir :

$$\Delta t \leq \delta t = \frac{1}{B}$$

La résolution dans l'autre dimension de l'image, que l'on qualifiera de résolution en azimuth, est en revanche liée aux principes de l'émission, de la propagation et de la réception d'ondes électromagnétiques cohérentes. Ce sont les lois d'antenne, définies par les dimensions de l'antenne utilisée et par la longueur d'onde de l'onde électromagnétique émise, qui dicteront l'ordre de grandeur de la résolution et qui conduiront à définir le principe de l'antenne synthétique.

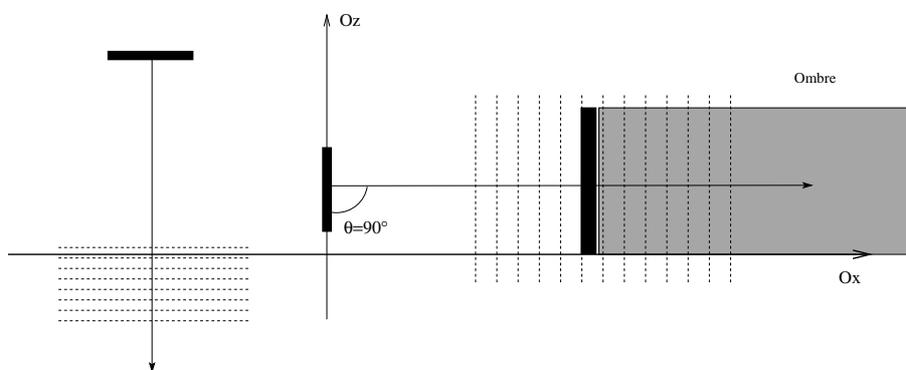


FIG. 1.3 – Cas extrêmes en visée latérale. A gauche, la visée verticale : le sol se retrouve dans une case distance unique. A droite, la visée latérale avec $\theta = 90^\circ$; tout objet d'altitude non nulle créera une ombre masquant tous les objets situés au delà.

Nous allons tout d'abord analyser le problème de la mesure du temps de vol avant d'aborder l'analyse spécifique du diagramme d'antenne et les aspects d'antenne synthétique qui conduisent à l'élaboration d'images. Auparavant, il est important d'effectuer une dernière remarque préliminaire liée à l'incidence de l'onde Radar.

Un système Radar imageur est généralement utilisé pour donner une image analogue à une image optique : c'est donc une surface que l'on souhaite décrire, par exemple une portion du globe terrestre. En première analyse, seule la rétrodiffusion surfacique est à prendre en compte². La figure 1.2 propose une coupe radiale où l'on voit une antenne placée à l'altitude h émettre des ondes localisées dans le lobe principal de l'antenne (on considère qu'en dehors de ce lobe d'antenne les ondes émises par l'antenne ont une énergie très faible : ce point sera analysé au paragraphe 1.4). Les cercles isochrones ont été tracés uniquement à l'intérieur de ce lobe, et ils intersectent le sol (plan $z = 0$).

Les systèmes radar imageurs sont dit à visée latérale. En effet :

- prendre une incidence nulle reviendrait à confondre tous les éléments d'une surface plane dans une même case distance (figure 1.3 gauche). La seule information que l'on peut alors extraire des données est la distance entre le capteur et le sol. C'est le principe du radar altimètre qui ne fait pas une image, mais un simple profil d'altitude.
- Prendre une incidence à 90° est aussi très pénalisante car tout objet en "sur-relief" créera une ombre derrière lui (figure 1.3 droite).

Le choix de l'incidence de tout système à visée latérale est donc crucial et sera traité au paragraphe 1.7.

²Cette approximation est réaliste pour les radars centimétriques en bande C et en bande X, mais n'est pas correcte pour les systèmes de plus basse longueur d'onde (décimétriques, bande L) qui subissent des effets de rétrodiffusion volumique liées par exemple à la végétation, voire à la pénétration dans des sols secs.

1.3 La résolution en distance et le filtrage adapté

1.3.1 Hypothèse de linéarité

Une des hypothèses majeures du traitement radar est de supposer le milieu linéaire, tant pour l'aspect propagation que pour l'aspect rétrodiffusion.

- Si la propagation est linéaire, et en simplifiant d'autres aspects inhérents aux lois de propagation³, les effets de la propagation dans le milieu se restreignent à un simple retard. Au trajet aller r de l'onde va correspondre une réponse impulsionnelle du milieu réduit à un simple retard $\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$. De même au trajet retour va correspondre la même réponse impulsionnelle du milieu réduit à un simple retard $\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$.
- La rétrodiffusion de la cible est linéaire : on suppose donc qu'elle a une réponse impulsionnelle $h(t)$.

Si le signal émis s'exprime comme $s_e(t)$, le signal reçu $s_r(t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} s_r(t) &= \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \star h(t) \star \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \star s_e(t) \\ &= h(t) \star \delta\left(t - \frac{2r}{c}\right) \star s_e(t) \end{aligned}$$

1.3.2 La mesure de temps de vol et les contraintes du Radar

Soit un signal de durée "significative" Δt , émis à l'instant $t_0 = 0$. Si ce signal est rétrodiffusé par une cible ponctuelle située à une distance R_1 de la source, l'antenne reçoit donc ce signal à l'instant t_1 tel que :

$$t_1 = \frac{2R_1}{c},$$

S'il existe une seconde cible située à la distance R_2 , l'antenne reçoit ce nouveau signal à l'instant t_2 tel que :

$$t_2 = \frac{2R_2}{c}.$$

En première analyse, pour pouvoir séparer ces deux événements sur le signal temporel, une condition est requise :

$$|t_2 - t_1| \geq \Delta t.$$

Il est donc souhaitable de pouvoir émettre des signaux dont la durée soit la plus brève possible afin de pouvoir séparer des objets rapprochés. En particulier, si l'on recherche une résolution δr , il faut pouvoir mesurer des intervalles de temps δt tels que :

$$\delta t \leq \frac{2\delta r}{c}.$$

et cette contrainte dictera le pas d'échantillonnage $\Delta t < \delta t$. Cet objectif de séparer deux cibles proches est à la base du principe du radar à impulsions.

Pour aborder cette analyse on va considérer le signal dont le spectre $\hat{S}(f)$ est uniforme sur la totalité d'une bande B centrée autour de la fréquence nulle. Si l'on suppose aussi que la phase de ce spectre est nulle, il est alors aisé d'en déduire l'allure du signal temporel d'énergie unité correspondant :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{2j\pi ft} dt \\ &= \sqrt{B} \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} \\ &= \sqrt{B} \operatorname{sinc}(\pi B t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où la fonction sinc est le sinus cardinal et dont le choix de la normalisation a été effectué ici pour avoir une énergie unitaire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s(t))^2 dt = 1$$

On connaît bien entendu les paramètres caractéristiques du sinus cardinal, repris dans le tableau 1.2 et calculés numériquement dans le cas d'ERS (bande passante de 15.55 MHz) et celui de Terrasar-X (dans le cas d'une bande passante de 150 MHz). Dans ce tableau, on introduit un paramètre auxiliaire α_r tel que :

$$\delta t = \frac{\alpha_r}{B} \quad (1.3)$$

Caractéristiques en résolution du sinus cardinal normalisé $\sqrt{B} \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$						
	$\left(\frac{s(t)}{\sqrt{B}}\right)^2$	α_r	$\delta t = \frac{\alpha_r}{B}$	$\delta r = \frac{c \delta t}{2}$	ERS δr $B = 15.55 \cdot 10^6$	Terrasar-X δr $B = 150 \cdot 10^6$
Position à 3 dB	0,501	0.44	$\frac{0.44}{B}$	$0.44 \frac{c}{2B}$	4,24 m	0,44 m
Position à 3,92 dB	0,405	0.5	$\frac{0.5}{B}$	$0.5 \frac{c}{2B}$	4,82 m	0,5 m
Position du premier zéro	0	1	$\frac{1}{B}$	$\frac{c}{2B}$	9,65 m	1m
Position du premier secondaire	0,0450 = 13,46 dB	1.5	$\frac{1.5}{B}$	$1.5 \frac{c}{2B}$	14,47 m	1,5 m

Tab. 1.2 – Caractéristiques principales du sinus cardinal $\frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$ en terme de résolution, c'est à dire la position à laquelle une seconde cible pourra se trouver sans perturber l'observation d'une première cible positionné à l'origine. Les résolutions axiales en distance δr et en temps δt s'expriment uniquement en fonction de B (bande utile), et du paramètre ancillaire α_r . Cas des satellites ERS et Terrasar-X

On voit que c'est bien une notion de résolution qui apparaît dans cette analyse. Par exemple, considérons le cas $\alpha_r = 1$. Si nous considérons deux cibles identiques espacées de $\delta r = \frac{c \delta t}{2} = \frac{c}{2B}$, la seconde aura une contribution nulle (car dans le premier zéro du sinus cardinal) dans la case distance correspondant à la première. De même, dans la case distance de la seconde cible, la première n'aura aucune contribution. Ceci définit un critère de résolution (de même que pour la notion d'ouverture, d'autres critères peuvent être définis).

Une autre analyse peut être menée autour de ce sinus cardinal en considérant l'ouverture de cette fonction. Pour cela on considère la durée sur laquelle une cible donnée a une contribution quantifiable. Par exemple, on peut s'intéresser au lobe principal du sinus cardinal défini comme l'intervalle entre les premiers zéros : on dira alors que le sinus cardinal a une ouverture "au sens du premier zéro" égale à $\frac{2}{B}$. De même on peut s'intéresser à la directivité qui est le rapport $\left(\frac{s(t)}{\sqrt{B}}\right)^2 = mn$ calculé en db : on parlera alors d'ouverture à mn db. Selon ce critère choisi, on aura alors une valeur du paramètre α ($\delta t = \frac{\alpha}{B}$) donné. Le tableau 1.3 reprend quelques valeurs d'ouverture, avec des applications numériques pour ERS et Terrasar-X. Dans ce tableau, on introduit un paramètre auxiliaire α tel que :

$$\delta t = \frac{\alpha}{B} \quad (1.4)$$

Dans le cas d'ERS pour lequel la résolution axiale est de l'ordre de 9,65 m, $\delta t \leq 64 \cdot 10^{-9} s$, et la bande de fréquence est de l'ordre de 15,55 MHz (qui sera donc la valeur minimale requise lors de l'échantillonnage). C'est d'ailleurs en utilisant cette notion de bande de fréquence que sont décrits la plupart des systèmes RSO.

Générer un sinus cardinal est une vraie gageure puisque, sur le plan théorique, c'est un signal de durée infinie. De plus, sous la forme proposée, il correspond à une impossibilité tant physique que technologique puisqu'il est centré autour de la fréquence nulle. Pour s'affranchir de ce dernier point, il suffit d'utiliser une porteuse en translatant le spectre, de largeur B , autour d'une fréquence de référence f_0 . Une translation de spectre s'écrit comme la convolution du spectre par une distribution de Dirac et revient alors à multiplier le signal temporel par une exponentielle complexe :

$$\hat{S}'(f) = \delta(f - f_0) \star \hat{S}(f) \Leftrightarrow s'(t) = e^{2j\pi f_0 t} s(t).$$

ce qui donne pour un signal normalisé :

$$s'(t) = e^{2j\pi f_0 t} \sqrt{B} \operatorname{sinc}(\pi B t)$$

Si la bande B est petite vis à vis de la porteuse f_0 , on pourra parler de signal quasi-monochromatique : c'est bien le cas d'ERS ($f_0 = 5,3$ GHz, $B = 18,96$ MHz) ainsi que Terrasar-X ($f_0 = 9,65$ GHz, $B = 150$ MHz).

Si l'on sait, dans des disciplines comme l'échographie médicale, émettre des signaux brefs d'allure plus ou moins proche du fameux sinus cardinal, il se trouve que la technologie actuelle des Radars satellitaires ne permet

³En particulier, on se place en champ lointain

Caractéristiques en ouverture du sinus cardinal normalisé $\sqrt{B} \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$						
	$\left(\frac{s(t)}{\sqrt{B}}\right)^2$	α	δt	$\delta r = \frac{c \delta t}{2}$	ERS δr $B = 15.55 \cdot 10^6$	Terrasar-X δr $B = 150 \cdot 10^6$
Ouverture entre valeurs à 3 dB	0,501	0.88	$\frac{0.88}{B}$	$0.88 \frac{c}{2B}$	8,49 m	0,88 m
Ouverture entre valeurs à 3,92 dB	0,405	1	$\frac{1}{B}$	$\frac{c}{2B}$	9,65m	1m
Ouverture entre premiers zéros	0	2	$\frac{2}{B}$	$2 \frac{c}{2B}$	19,29 m	2m
Ouverture entre premiers secondaires = 13,46 dB	0,0450	3	$\frac{3}{B}$	$3 \frac{c}{2B}$	28,94 m	3m

Tab. 1.3 – Caractéristiques principales du sinus cardinal $\frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$ en terme d'ouverture, c'est à dire la zone dans laquelle une cible peut se trouver en étant observé par le système. Les ouvertures en distance δr et en temps δt s'expriment uniquement en fonction de B (bande utile) et du paramètre ancillaire α . Cas des satellites ERS et Terrasar-X

pas d'avoir une puissance suffisante dès lors que l'on émet des signaux brefs (hormis le cas d'Almaz, qui pouvait effectivement émettre une puissance crête de 290 kW). En revanche, il est possible d'émettre un signal d'une durée suffisante pour être considéré comme quasimonochromatique (et donc bien adapté à la technologie utilisée), centré autour d'une fréquence f_0 et dont on module la fréquence centrale entre $f_0 - \frac{B}{2}$ et $f_0 + \frac{B}{2}$.

Le cas de la modulation linéaire de la fréquence est celui qui a été adopté en télédétection satellitaire à cause de la simplicité de sa mise en œuvre sur le plan technologique et à cause aussi du principe fondamental de traitement du signal associé : le filtrage adapté. Ce dernier permet de retrouver à peu près les caractéristiques du sinus cardinal précédemment évoqué et fera l'objet du paragraphe suivant (1.3.3). D'autres approches seront brièvement évoquées au paragraphe 1.3.4.

1.3.3 Le principe du filtrage adapté : cas de la rampe modulée linéairement en fréquence

Nous allons maintenant considérer un signal $s(t)$ émis sur un intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ et de type quasi-monochromatique : on peut lui attribuer une fréquence centrale f_0 , mais sa fréquence instantanée $f(t)$, tout en restant contrainte à l'intervalle $[f_0 - \frac{B}{2}, f_0 + \frac{B}{2}]$, varie au cours du temps.

Le signal de ce type le plus simple à utiliser est le "signal modulé linéairement en fréquence", appelé plus communément par sa terminologie anglosaxonne *chirp*. Son expression temporelle est donnée par la relation :

$$s(t) = A_0 e^{2j\pi(f_0 t + \frac{K}{2} t^2)} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (1.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= 1 \quad \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

$s(t)$ peut aussi s'exprimer comme

$$s(t) = e^{\varphi(t)}$$

avec

$$\varphi(t) = 2j\pi\left(f_0 t + \frac{K}{2} t^2\right)$$

Sa fréquence instantanée $f(t)$ varie linéairement avec le temps :

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = f_0 + K t, \quad f(t) \in \left[f_0 - \frac{B}{2}, f_0 + \frac{B}{2}\right]$$

On a donc cette fréquence instantanée dans l'intervalle $[f_0 - \frac{KT}{2}, f_0 + \frac{KT}{2}]$, exactement égale à f_0 à $t = 0$. Sa bande utile est

$$B = KT$$

Le sinus cardinal a lui aussi un spectre localisé dans une bande donnée : sa transformée de Fourier est l'identité entre $-B/2$ et $B/2$, avec une partie imaginaire nulle. A la différence du cas du sinus cardinal, la phase de la transformée de Fourier d'un *chirp* n'est pas constante.

Le calcul de la transformée de Fourier de l'expression 1.5 présente quelques difficultés. Considérons, dans la phase, uniquement le terme quadratique :

$$r(t) = A_0 e^{j\pi K t^2} \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (1.6)$$

Sa transformée de Fourier s'exprime alors :

$$\hat{R}(f) = A_0 e^{-\frac{j\pi f^2}{K}} \sqrt{\frac{j}{K}} \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{j\pi}{K}} \left(\frac{KT}{2} - f \right) \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{j\pi}{K}} \left(\frac{KT}{2} + f \right) \right) \right] \quad (1.7)$$

avec erf désignant la fonction d'erreur : $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.

Simplifier une telle expression n'est apparemment pas trivial. C'est pourquoi il est d'usage d'invoquer le théorème de la phase stationnaire [15] qui permet de donner une expression approchée de la transformée de Fourier du signal $r(t)$ pour KT grand et d'autant plus raisonnable que $\frac{f}{KT}$ est petit :

$$r(t) = A_0 e^{j\pi K t^2} \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \Leftrightarrow \hat{R}(f) = A_0 e^{-\frac{j\pi f^2}{K}} \sqrt{\frac{j}{K}} \quad f \in \left[-\frac{KT}{2}, \frac{KT}{2}\right]. \quad (1.8)$$

On voit ainsi que la loi suivie par la phase de la transformée de Fourier est elle aussi quadratique (très schématiquement, on retrouve la propriété bien connue que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne).

On peut alors approcher la transformée de Fourier du signal $s(t)$ par une expression très facilement exploitable :

$$\begin{aligned} s(t) &= A_0 e^{2j\pi(f_0 t + \frac{K}{2} t^2)} \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ \rightarrow \hat{S}(f) &= A_0 e^{-\frac{j\pi(f-f_0)^2}{K}} \sqrt{\frac{j}{K}} \Pi \left(\frac{f-f_0}{KT} \right) \quad f \in \left[-\frac{KT}{2}, \frac{KT}{2}\right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Il faut remarquer dans cette expression que le module de $\hat{S}(f)$ est constant pour $f \in \left[-\frac{KT}{2}, \frac{KT}{2}\right]$ et nul ailleurs. Il y a en fait une impossibilité à avoir un signal à la fois borné en temps et en fréquence : l'expression 1.9 est en fait le résultat de l'approximation de l'expression 1.7. Cependant cette simplification va permettre facilement de comprendre comment le filtrage adapté –qui va être introduit dans les lignes suivantes– “agit” sur une rampe modulée linéairement en fréquence.

Considérons maintenant la convolution du signal $r(t)$ (équation 1.6) par son conjugué retourné dans le temps :

$$rr(t) = r(t) \star r^*(-t)$$

Cette opération porte le nom de filtrage adapté. La transformée de Fourier d'un tel signal s'écrit alors directement :

$$\hat{R}R(f) = \hat{R}(f) \hat{R}^*(f) = |\hat{R}(f)|^2 = A_0^2 \frac{1}{K} \Pi \left(\frac{f}{KT} \right). \quad (1.10)$$

On a donc une transformée de Fourier constante dans une certaine bande de fréquence centrée à l'origine, et dont la phase est nulle : c'est très exactement le cas du sinus cardinal, déjà analysé en détail au paragraphe dédié à l'analyse du temps de vol (1.3.2). Autrement dit, l'expression du signal $rr(t)$ s'obtient par transformée de Fourier inverse de la relation 1.10 :

$$rr(t) = A_0^2 T \frac{\sin(\pi KT t)}{\pi KT t} = A_0^2 T \operatorname{sinc}(\pi KT t) = A_0^2 T \operatorname{sinc}(\pi B t).$$

Nous avons déjà analysé les propriétés d'un tel signal (voir pour les aspects “résolution” le tableau 1.2 et pour les aspects “ouverture” le tableau 1.3) : si l'on considère sa largeur entre deux zéros, on sait qu'elle est égale à :

$$T' = \frac{1}{KT} = \frac{1}{B}.$$

Par conséquent, sous des hypothèses de linéarité présentées au paragraphe 1.3.1, on avait vu que le signal reçu $s_r(t)$ s'exprimait par des convolutions mettant en jeu le signal émis $s_e(t)$, des retards et la réponse impulsionnelle de la cible $h(t)$:

$$s_r(t) = h(t) \star \delta \left(t - \frac{2r}{c} \right) \star s_e(t).$$

Pour un signal émis $s_e(t)$ de type *chirp*, on peut faire subir au signal reçu un filtrage adapté en le convoluant avec le signal émis, conjugué, retourné dans le temps. On obtient alors le signal $s'_r(t)$:

$$s'_r(t) = s_r(t) \star s_e^*(-t)$$

On obtient alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} s'_r(t) &= s_e^*(-t) \star \left(h(t) \star \delta\left(t - \frac{2r}{c}\right) \star s_e(t) \right) \\ &= (s_e^*(-t) \star s_e(t)) \star h(t) \star \delta\left(t - \frac{2r}{c}\right) \\ &\sim \text{sinc}(\pi K T t) \star h(t) \star \delta\left(t - \frac{2r}{c}\right) \end{aligned}$$

Tout se passe donc comme si on avait effectivement émis un sinus cardinal, donc un signal de durée idéalement courte $T' = \frac{1}{KT}$, ce que les contraintes technologiques nous avaient interdits. Le signal émis, d'une durée T , a donc été comprimé d'un facteur :

$$k = \frac{T}{T'} = K T^2$$

ce qui donne pour ERS environ 577.

1.3.4 Autres formes d'onde

Les *chirp* synthétiques

Des systèmes RSO peuvent émettre successivement des signaux de fréquences centrales différentes, et donc de bandes passantes différentes. Si on choisit les fréquences et les bandes de sorte qu'elles soient contiguës sans recouvrement, on imagine alors qu'il doit être possible de traiter les données comme si on avait effectivement un *chirp* unique et de bande plus élevée.

Si ce principe est aisé à mettre en œuvre sur le papier, les problèmes liés aux conditions aux limites sur les bords de chaque spectre conduisent à de grandes difficultés de mise en œuvre, de quasi impossibilités matérielles.

Le *deramp*

L'exploitation de l'émission d'un *chirp* par la technique du filtrage adapté requiert donc en réception la numérisation du signal avec une fréquence d'échantillonnage au moins égale, sinon supérieure à l'excursion en fréquence du *chirp*. Si le numériseur requis pour des données à faible résolution comme celles acquises par ERS est tout à fait abordable ($F_{ech} = 18.96$ MHz), il en est tout autrement dès lors que l'on vise une résolution métrique voire décimétrique : la fréquence d'échantillonnage doit alors atteindre plusieurs centaines de MHz.

Pour s'affranchir de cette contrainte technologique, une autre méthode, appelée *deramp*, peut être mise en œuvre : elle vise donc à améliorer la résolution en conservant une fréquence d'échantillonnage réduite. Cette performance ne sera atteinte qu'au détriment d'un des paramètres image : la taille de la fauchée utile.

Considérons donc un signal de type *chirp* émis sur une durée T :

$$e^{j\pi K t^2} \Pi_T(t).$$

Sa bande passante utile est KT et requiert donc un échantillonnage à la fréquence $F_e = KT$.

Le signal $s(t)$ rétrodiffusé par une cible située à la distance $\frac{ct_0}{2}$ s'écrit :

$$s(t) = e^{j\pi K (t-t_0)^2} \Pi_T(t - t_0).$$

Démodulons ce signal par le signal émis à compter de l'instant $t_1 > t_0$ sur une durée T_d . On obtient le signal $s_d(t)$:

$$\begin{aligned} s_d(t) &= e^{j\pi K (t-t_0)^2} \Pi_T(t - t_0) e^{-j\pi K (t-t_1)^2} \\ &= e^{j\pi K (t_0^2 - t_1^2)} e^{2j\pi K (t_1 - t_0) t} \Pi_T(t - t_0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le dernier terme est donc un signal exponentiel complexe de fréquence f_r ;

$$f_r = K(t_1 - t_0)$$

Si l'on se limite à une analyse sur une durée T_r , il faut donc que la bande utile du signal s_d , échantillonné à la fréquence F' , vérifie les hypothèses de Shannon, ce qui s'exprime par la condition suivante :

$$KT_r \leq F'.$$

Dans le cas où l'on a l'égalité, on peut écrire :

$$F' = KT_r = KT \frac{T_r}{T} = F_e \frac{T_r}{T}$$

On voit qu'il est donc possible d'utiliser une fréquence d'échantillonnage du signal reçu inférieure à celle requise précédemment à condition de limiter la durée du signal à analyser, ce qui revient à diminuer la fauchée.

Une fois ces paramètres définis, il suffit d'effectuer une transformée de Fourier (\mathcal{F}) de l'expression 1.11 pour obtenir un signal donnant directement la localisation des cibles, puisque, à un terme de phase près, on a :

$$\mathcal{F}(s_d(t))(f) \sim \delta(f - K(t_1 - t_0))$$

1.3.5 Conclusions sur l'analyse en distance

Les méthodes de traitement du signal appliquées sur le signal radar d'un système imageur RSO ont donc les conséquences suivantes

- Bien que le signal émis soit effectivement un *chirp* de durée T , le filtrage adapté comprime cette durée d'un facteur lié à la loi de modulation en fréquence du signal émis égal à KT^2 .
- La réponse impulsionnelle s'exprime sous une forme spécifique : un sinus cardinal, dont l'expression temporelle s'écrit pour une cible située à une distance r_c et donc s'observant sur le signal temporel en t_c :

$$\frac{\sin(\pi KT(t - t_c))}{KT(t - t_c)}$$

En effectuant le changement de variable :

$$r = \frac{ct}{2}$$

Cette expression se réécrit

$$\frac{\sin(\pi \tilde{K} \tilde{R}(r - r_c))}{\pi \tilde{K} \tilde{R}(r - r_c)} \quad (1.12)$$

avec

$$\tilde{R} = \frac{cT}{2} \quad \tilde{K} = \frac{4K}{c^2}$$

La résolution δr s'exprime alors en fonction de $\tilde{B} = \tilde{K} \tilde{R}$.

On peut donc, après filtrage adapté, considérer que la réponse impulsionnelle du système d'écholocation s'écrit :

$$\text{Sinc}(\pi \tilde{B}_x x) \quad \tilde{B}_x = \frac{1}{\delta x} = \frac{2B}{c} \quad (1.13)$$

Dans le cas d'ERS, les valeurs numériques obtenues en formulation temporelle sont reprises dans le tableau 1.4, et, pour la formulation spatiale, dans le tableau 1.5, avec θ variant entre 20° à 27° .

1.4 Lois d'antenne

1.4.1 Principes en 2-D

Mouvements d'antenne

La figure 1.2 a donc montré comment on pouvait séparer des cibles placées sur un plan ($z = 0$) par analyse temporelle du signal reçu. Sur ce schéma a donc été supposé que l'onde électromagnétique ne pouvait pénétrer le sol (points en $z < 0$) : on a donc une équivalence entre intervalle de temps δt sur le signal analysé et intervalle d'espace δx au sol par la relation :

$$\delta_x = \frac{c \delta t}{2}.$$

A la différence d'une source ponctuelle isotrope, une antenne possède des propriétés géométriques, que nous allons préciser, qui réduisent l'espace d'illumination dans une zone appelée *lobe d'antenne*. La figure 1.4 montre

Satellite ERS : capteur AMI		
K	$0.41889 \cdot 10^{12}$	
T	$37.12 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	durée du chirp
$B = KT$	15.55 MHz	Bande passante du chirp
KT^2	577.22	facteur de compression
$\frac{1}{KT}$	$64 \cdot 10^{-9} \text{ s}$	durée utile du Sinc équivalent
$\frac{c}{2} \frac{1}{KT}$	9.65 m	résolution sur l'axe de propagation
$\frac{c}{2} \frac{1}{KT} \frac{1}{\sin \theta}$	de 28.2 m à 21.2 m	résolution au sol
F_{ech}	18.96 MHz	Fréquence d'échantillonnage
$\frac{c}{2} \frac{1}{F_{ech}}$	7.90 m	dimension du pixel selon Ox des images RAW et SLC
	12.5 m	dimension selon Ox des pixels PRI

TAB. 1.4 – ERS/AMI : constantes liées au filtrage adapté sur le signal temporel.

Satellite ERS : capteur AMI		
\tilde{K}	$1,862 \cdot 10^{-5}$	
\tilde{R}	$5,568 \cdot 10^3 \text{ m}$	Résolution en distance avant filtrage adapté
$\tilde{B} = \tilde{K}\tilde{R}$	$0,104 \text{ m}^{-1}$	Bande de fréquence spatiale utile
$\tilde{K}\tilde{R}^2$	577,22	Facteur de compression
$R_d = \frac{1}{\tilde{K}\tilde{R}}$	9,65 m	résolution sur l'axe de propagation

TAB. 1.5 – ERS/AMI : constantes liées au filtrage adapté dans l'espace des distances radiales.

dans le plan $z = 0$ les zones d'intérêt correspondant aux parties des sphères isochrones situées à l'intérieur du lobe d'antenne.

La formation d'une image avec un système Radar peut alors s'envisager de deux manières différentes (voir figure 1.5) :

- en tournant l'antenne : c'est le principe des Radar de surveillance. L'antenne tourne avec une vitesse angulaire constante, l'émission (et la réception) s'effectuant à des instants réguliers définis par la FRI (Fréquence de Répétition des Impulsions), appelée aussi PRF (*Pulse Repetition Frequency*).
- en déplaçant l'antenne selon un mouvement rectiligne uniforme, l'émission (et la réception) s'effectuant à des instants réguliers définis par la FRI.

Grâce à ces mouvements, une couverture spatiale est alors assurée, et, dans la mesure où les lobes d'antennes successifs ne se recouvrent pas, on a alors une localisation possible des cibles. Intuitivement, on voit qu'une bonne localisation du lobe d'antenne (que l'on souhaiterait le plus étroit possible) permet une bonne localisation spatiale des cibles : on passe ainsi du monodimensionnel temporel au bidimensionnel spatial.

Dans les deux cas, on voit qu'il est souhaitable d'avoir un lobe d'antenne étroit. Nous allons voir quelles sont les conditions à vérifier pour assurer la finesse du lobe et dans quelle mesure ces conditions peuvent être mises en application.

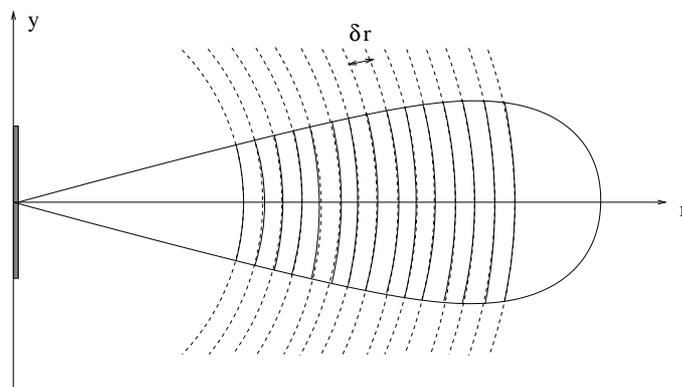
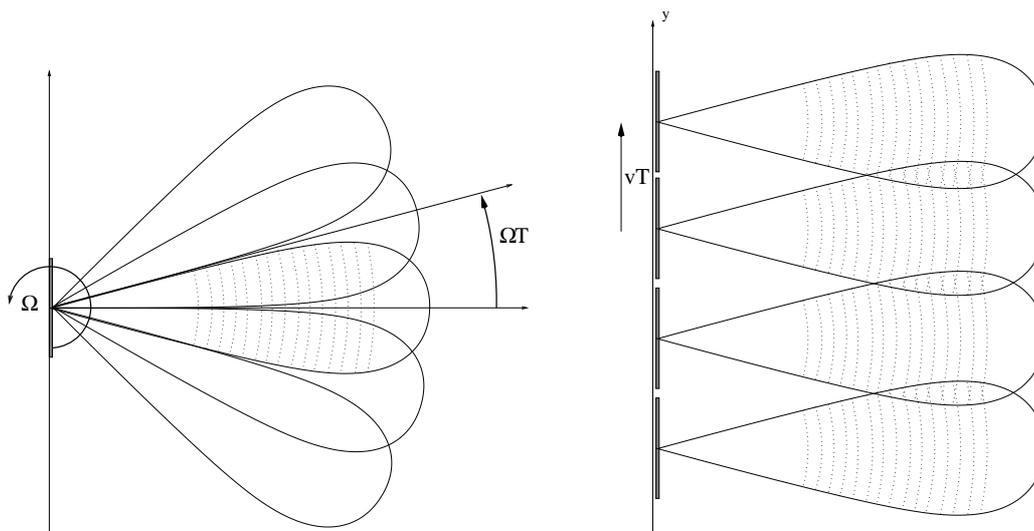


FIG. 1.4 – Principe du Radar (ramené sur cette figure dans le plan "azimutal") : l'antenne concentre ses émissions dans le lobe d'antenne, ce qui définit les zones d'intérêt sur les hypersphères isochrones.

	λ	longueur	largeur
JERS	23,5 cm	10,7 m	2,2 m
ALOS	23,5 cm	8,9 m	3,1 m
ERS	5,66 cm	10 m	1 m
ENVISAT	5,66 cm	10 m	1,3 m
Radarsat-1	5,66 cm	15 m	1,5 m
Radarsat-2	5,55 cm	15 m	1,5 m
Terrasar-X	3,1 cm	4,8 m	0,8 m
CSK	3,1 cm	5,7 m	1,4 m

TAB. 1.6 – Dimensions des antennes de divers systèmes usuels

FIG. 1.5 – Principe du Radar de surveillance (mouvement assuré par une rotation de vitesse angulaire constante Ω , à gauche) et du Radar imageur embarqué sur un porteur (se déplaçant à une vitesse constante v , à droite).

Analyse en champ lointain

Dans le cadre de la télédétection satellitaire, un des points simplifiant fortement le formalisme est que l'on se trouve en "champ lointain" (du moins pour l'antenne réelle). En effet, le tableau 1.1 montre que l'antenne élémentaire est de dimension métrique selon un axe et décamétrique dans l'autre, que le signal est quasi monochromatique et que longueur d'onde est centimétrique, et que la distance R entre antenne et cible est proche de 1000km.

Les conditions de "champ lointain" que l'on trouve par exemple dans l'ouvrage de Goodman [8] demandent que soient vérifiées la relation :

$$R \gg \frac{L^2 + l^2}{2\lambda}$$

Or nous avons pour ERS :

$$\frac{L^2}{2\lambda} = 883\text{m} \ll 10^6\text{m}$$

et donc cette condition est largement vérifiée.

Rappelons que, puisque cette relation est vérifiée, on a les propriétés suivantes :

- le parcours entre tout point de l'antenne et le point au sol P (supposé ici confondu avec le plan Π orthogonal au vecteur d'onde, situé à la distance R de l'antenne) peut être considéré comme constant pour le terme de décroissance géométrique en $\frac{1}{r}$ du champ électromagnétique. De plus, pour tout point voisin de P et situé, dans le plan Π perpendiculaire au vecteur d'onde, en (x, y) (voir figure 1.6), on a :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 + (y^2 + z^2)} \\ &= R \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

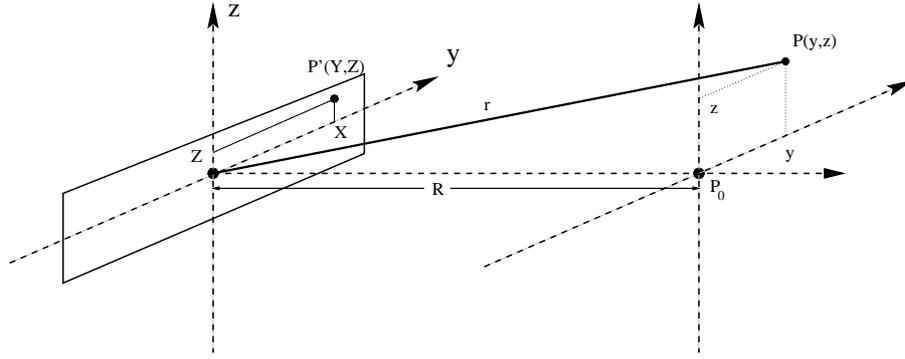


FIG. 1.6 – Analyse du champ créé par une antenne sur un plan perpendiculaire au vecteur d'onde et situé à une distance R de l'antenne (on suppose que R vérifie les conditions de Fraunhofer).

$$\sim R + \frac{y^2 + z^2}{2R}$$

- le parcours entre tout point de l'antenne et le point au sol peut être développé au premier ordre dans le terme de phase. En effet, si R est la distance entre le centre de l'antenne et le plan Π , en considérant tout point P' à l'intérieur de l'antenne et de coordonnées (Y, Z) , pour tout point P situé en (y, z) dans le plan Π perpendiculaire au vecteur d'onde (voir figure 1.6), on a la distance r :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 + ((y - Y)^2 + (z - Z)^2)} \\ &= R \left(1 + \frac{(y - Y)^2 + (z - Z)^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si l'on a de plus $y \gg Y$ et $z \gg Z$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} r &\sim R \left(1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} - \frac{2(yY + zZ)}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim R + \frac{y^2 + z^2}{2R} - \frac{yY + zZ}{R} \end{aligned}$$

On voit alors que le terme de phase

- varie quadratiquement selon la position du point P
- varie linéairement en fonction de la position du point P' considéré sur l'antenne

Etant en champ lointain, on peut alors en déduire la contribution de l'antenne (supposée non apodisée), définie par sa surface Σ sur le champ produit en un point P de coordonnées (x, y) . En effet, en utilisant le principe de Huyghens-Fresnel [8], et en prenant en compte les approximations précédemment trouvées, on peut écrire :

$$\begin{aligned} U(P) &= A \int_{\Sigma} \int \frac{1}{4\pi r} e^{jkr} ds \\ &\approx \frac{A}{4\pi R} e^{jk \frac{y^2 + z^2}{2R}} \int_{\Sigma} \int e^{-jk(xX + yY)} ds \end{aligned}$$

On reconnaît alors la transformée de Fourier de l'antenne, supposé avoir un champ électromagnétique identique sur toute sa surface, ce qui permet alors d'obtenir directement les lois d'antenne. Puisque l'antenne est rectangulaire, on peut alors exprimer cette transformée de Fourier sous forme séparable, ce qui donne alors la PSF (*Point Spread Function*) $U(y, z)$ en tout point d'analyse $P(y, z)$ du plan Π :

$$\begin{aligned} U(y, z) &\sim e^{jk \frac{y^2 + z^2}{2R}} \frac{LL}{\lambda R} \text{Sinc} \left(\pi \frac{Ly}{\lambda R} \right) \text{Sinc} \left(\pi \frac{Lz}{\lambda R} \right) \\ &\sim e^{jk \frac{y^2}{2R}} \text{Sinc} \left(\pi \frac{Ly}{\lambda R} \right) e^{jk \frac{z^2}{2R}} \text{Sinc} \left(\pi \frac{Lz}{\lambda R} \right) \\ &\sim U_y(y) U_z(z) \end{aligned} \quad (1.15)$$

La PSF bidimensionnelle est donc le produit de deux PSF monodimensionnelles, qui ont la même forme analytique (avec comme paramètre dans un cas la dimension de l'antenne selon Oy : L , et dans l'autre cas la dimension

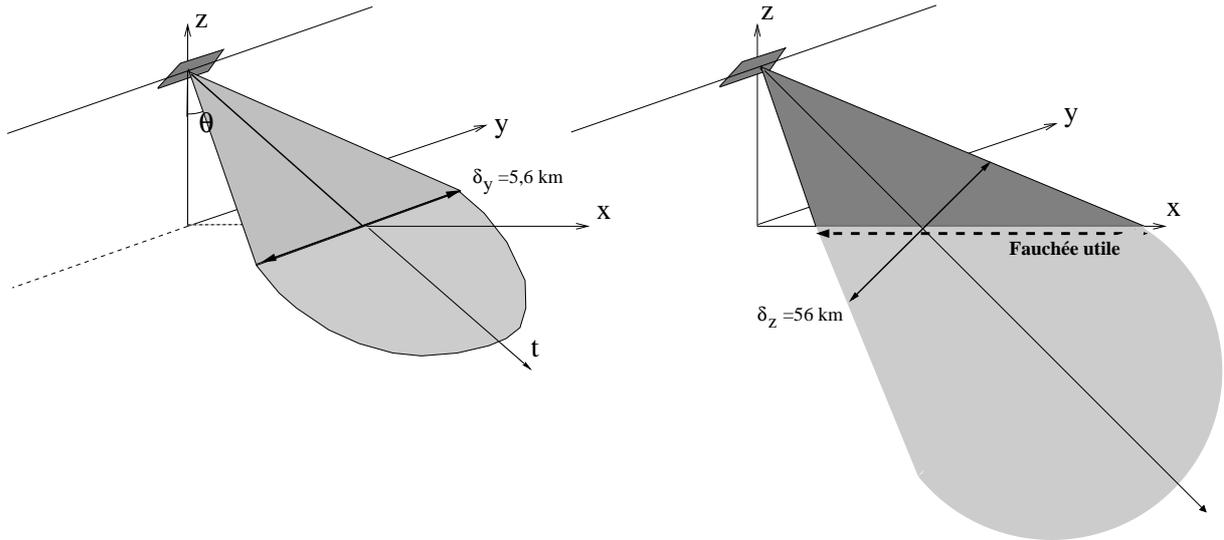


FIG. 1.7 – L’antenne ERS : la résolution selon Oz va définir, en intersectant le sol, la fauchée (à droite). Dans cette fauchée, l’échantillonnage temporel donnera la résolution selon Ox . Selon Oy (à gauche), la résolution est celle du RAR (Real Aperture Radar) et est franchement mauvaise.

de l’antenne selon Oz : l). Cette forme analytique est aussi identique à la réponse impulsionnelle du radar selon son aspect temporel (expression 1.2. Pour en souligner la ressemblance formelle, on peut définir des “bandes passantes spatiales” \hat{B}_y et \hat{B}_z par les relations :

$$\hat{B}_y = \frac{L}{\lambda R} \quad \hat{B}_z = \frac{l}{\lambda R}$$

La relation 1.15 devient alors :

$$U(y, z) \sim \text{Sinc}(\pi \hat{B}_y y) \text{Sinc}(\pi \hat{B}_z z) \quad (1.16)$$

et l’analyse de la résolution de l’antenne est identique à celle menée dans le cas de l’analyse du signal d’écholocation puisque tout revient à étudier un sinus cardinal.

Connaissant les caractéristiques du sinus cardinal (voir pour les aspects “résolution” le tableau 1.2 et pour les aspects “ouverture” le tableau 1.3), on peut donc en déduire les caractéristiques de l’antenne, tant sur les aspects “résolution” que les aspects “ouverture”. Une fois un critère α défini :

- la résolution de l’antenne sera alors donnée par l’expression :

$$\delta_y = \alpha \frac{\lambda R}{L} \quad \text{et} \quad \delta_z = \alpha \frac{\lambda R}{l} \quad (1.17)$$

- la résolution de l’antenne sera alors donnée par l’expression :

$$\Omega_y = \alpha \frac{2\lambda R}{L} \quad \text{et} \quad \Omega_z = \alpha \frac{2\lambda R}{l} \quad (1.18)$$

Dans le cas d’ERS ($\lambda=5.66$ cm et $R \sim 1000$ km), on a donc $L = 10$ m (direction Oy , correspondant à la trajectoire du satellite) et $L=10$ m (direction Oz')

Pour ERS, on peut donc constater que selon Oy , la résolution est kilométrique et est du même ordre de grandeur que la longueur du *chirp*, *i.e.* la résolution en distance avant filtrage adapté.

Les valeurs “en ouverture” sont reprises sur la figure 1.7 qui illustre les deux points fondamentaux d’un système Radar imageur :

- L’ouverture selon la direction Oz de l’antenne définit, en intersectant le sol, la fauchée. Le long de cette fauchée, la résolution effective de l’image est celle du signal d’écholocation et est donnée par les méthodes de traitement de signal permettant d’améliorer la résolution temporelle, et donc la résolution sur l’axe Ox du sol.
- L’ouverture selon l’axe Oy correspond effectivement à la position des points répondant dans la même case distance. Elle est kilométrique car l’antenne a une dimension limitée par les contraintes d’emport sur le lanceur et se trouve de surcroît à une distance de l’ordre du millier de kilomètre.

Pour atteindre des dimensions décamétriques pour la résolution azimutale, en utilisant l’expression 1.17, on obtient la dimension de l’antenne connaissant le critère d’ouverture souhaitée :

$$D = \alpha \frac{\lambda R}{\delta}$$

Caractéristiques (en résolution) du sinus cardinal de l'antenne $\text{Sinc}\left(\pi\frac{Ly}{\lambda R}\right) \text{Sinc}\left(\pi\frac{lz}{\lambda R}\right)$						
	$\left(\frac{U_y(y)}{U_y(0)}\right)^2$ ou $\left(\frac{U_z(z)}{U_z(0)}\right)^2$	α	δz	δz ($l = 1m$)	δy	δy ($L = 10m$)
Position à 3 dB	0,501	0.44	$0.44 \frac{\lambda R}{l}$	29,9 km	$0.44 \frac{\lambda R}{L}$	2,99 km
Position à 3,92 dB	0,405	0.50	$0.50 \frac{\lambda R}{l}$	28,3 km	$0.50 \frac{\lambda R}{L}$	2,83 km
Position du premier zéro	0	1.00	$1. \frac{\lambda R}{l}$	56,6 km	$1. \frac{\lambda R}{L}$	5,66 km
Position du premier secondaire	1.50 = 13,46 dB	3	$1.5 \frac{\lambda R}{l}$	84,9 km	$1.5 \frac{\lambda R}{L}$	8,49 km

Tab. 1.7 – Caractéristiques principales des sinus cardinaux de la PSF d'une antenne rectangulaire de cotés L et l en terme de résolution. Les valeurs numériques sont obtenues en prenant $\lambda = 5,66$ cm et $R = 1000$ km (cas d'ERS et d'ENVISAT).

et on voit que la dimension de l'antenne aurait plusieurs kilomètres !!

1.4.2 La synthèse

Une première analyse

Soit une antenne de dimension initiale L . Considérons la figure 1.8. Un point est donc "vu" pour différentes positions de l'antenne initiale. Connaissant l'ouverture de l'antenne de dimension L , on en déduit que l'antenne "voit" le point P sur une longueur L' défini par l'ouverture de l'antenne (expression 1.18) :

$$L' = \alpha \frac{2\lambda R}{L}$$

Par réciprocité, tout se passe donc comme si le point P appartenait à une antenne de dimension L et on peut donc déduire que si l'on est capable a posteriori d'analyser le signal reçu par l'antenne initiale tout au long de son trajet sur la distance L' , tout se passe comme si l'on avait une antenne physique de dimension L' . Sa résolution est alors (avec le même critère α) :

$$\delta = \alpha \frac{\lambda R}{L'} = \frac{L}{2}$$

On a alors une résolution de l'ordre de la dimension de l'antenne physique, donc métrique.

Cette analyse rapide va maintenant être abordé par traitement des signaux reçus tout au long du déplacement de l'antenne.

Principe de base

Nous avons donc vu que la résolution des antennes réelles des systèmes satellitaires donnait des résultats décevants et ne permet donc sans traitement que des résolutions kilométriques. Or nous avons vu que l'antenne se déplace sur une orbite, que l'on peut assimiler en première approximation à une trajectoire rectiligne, selon un mouvement uniforme (la vitesse est de l'ordre de 7,5 km/s).

Si l'émission et la réception s'effectuent régulièrement à une fréquence donnée (la FRI – Fréquence de Répétition des Impulsions – ou PRF – Pulse Repetition Frequency –), un objet au sol sera donc vu sur un certain nombre d'acquisitions consécutives (voir figure 1.9). Il est donc tentant de voir comment une méthode pourrait être proposée pour séparer, grâce à ces acquisitions redondantes, des cibles situées à l'intérieur du lobe d'antenne initial.

Soit un point au sol tel qu'il soit à une distance R sur une perpendiculaire à la trajectoire du satellite à l'instant $t = 0$. Cette position de référence est alors appelée le CPA (*Closest Point Approach*). Recherchons quelles sont les positions de l'antenne, de dimension L , pour lesquelles on peut considérer que la cible soit effectivement vue : il

Caractéristiques (en ouverture) du sinus cardinal de l'antenne $\text{Sinc}\left(\pi\frac{Ly}{\lambda R}\right) \text{Sinc}\left(\pi\frac{Lz}{\lambda R}\right)$						
	$\left(\frac{U_y(y)}{U_y(0)}\right)^2$ ou $\left(\frac{U_z(z)}{U_z(0)}\right)^2$	α	δz	δz ($l = 1m$)	δy	δy ($L = 10m$)
Ouverture entre valeurs à 3 dB	0,501	0.88	$0.88 \frac{\lambda R}{l}$	49,8 km	$0.88 \frac{\lambda R}{L}$	4,98 km
Ouverture entre valeurs à 3,92 dB	0,405	1	$\frac{\lambda R}{l}$	56,6 km	$\frac{\lambda R}{L}$	5,66 km
Ouverture entre premiers zéros	0	2	$2 \frac{\lambda R}{l}$	113,2 km	$2 \frac{\lambda R}{L}$	11,32 km
Ouverture entre premiers secondaires = 13,46 dB	0,0450	3	$3 \frac{\lambda R}{l}$	169,8 km	$3 \frac{\lambda R}{L}$	16,98 km

Tab. 1.8 – Caractéristiques principales des sinus cardinaux de la PSF d'une antenne rectangulaire de cotés L et l en terme d'ouverture. Les valeurs numériques sont obtenues en prenant $\lambda = 5,66$ cm et $R = 1000$ km (cas d'ERS et d'ENVISAT).

faut donc connaître l'expression de l'ouverture de l'antenne, ce qui donne la valeur \hat{Y} de l'ouverture pour un critère α donné (relation 1.17) :

$$\hat{Y} = \alpha \frac{\lambda R}{L}$$

On peut choisir comme positions les points tels que :

$$y \in \left[-\frac{\hat{Y}}{2}; \frac{\hat{Y}}{2} \right]$$

c'est à dire

$$y \in \left[-\alpha \frac{\lambda R}{2L}; \alpha \frac{\lambda R}{2L} \right]$$

Puisque l'on se trouve dans l'approximation de champ lointain, pour un signal monochromatique, l'expression 1.15 fournit le terme de déphasage pour toute position y :

$$e^{jk \frac{y^2}{2R}} = e^{j\pi \frac{y^2}{\lambda R}} \quad y \in \left[-\frac{\hat{Y}}{2}, \frac{\hat{Y}}{2} \right]$$

En posant $\hat{K} = \frac{1}{\lambda R}$, on peut réécrire cette expression du déphasage :

$$e^{j\pi \hat{K} y^2} \quad y \in \left[-\frac{\hat{Y}}{2}, \frac{\hat{Y}}{2} \right]$$

d'où la définition de la phase azimutale ϕ :

$$\phi = j\pi \hat{K} y^2 \quad (1.19)$$

La fréquence spatiale instantanée f_i s'écrit alors :

$$f_i = \frac{1}{2j\pi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \hat{K} y \quad (1.20)$$

et correspond donc à une rampe de fréquence spatiale centrée autour de la fréquence nulle et dont la bande passante est :

$$\hat{B} = \hat{K} \hat{Y} = \frac{\alpha}{L}$$

On retrouve exactement les mêmes expressions que celles rencontrées dans l'étude du filtrage adapté au paragraphe 1.3.3 :

Caractéristiques (en ouverture) du sinus cardinal de l'antenne $\text{Sinc}\left(\pi\frac{Ly}{\lambda R}\right) \text{Sinc}\left(\pi\frac{lz}{\lambda R}\right)$						
	$\left(\frac{U_y(y)}{U_y(0)}\right)^2$ ou $\left(\frac{U_z(z)}{U_z(0)}\right)^2$	α	δz	δz ($l = 1m$)	δy	δy ($L = 10m$)
Ouverture à 3 dB	0,501	0.88	$0.88 \frac{\lambda R}{l}$	49,8 km	$0.88 \frac{\lambda R}{L}$	4,98 km
Ouverture à 3,92 dB	0,405	1	$\frac{\lambda R}{l}$	56,6 km	$\frac{\lambda R}{L}$	5,66 km
Ouverture "premiers zéros"	0	2	$2 \frac{\lambda R}{l}$	113,2 km	$2 \frac{\lambda R}{L}$	11,32 km
Ouverture "premiers secondaires" = 13,46 dB	0,0450	3	$3 \frac{\lambda R}{l}$	169,8 km	$3 \frac{\lambda R}{L}$	16,98 km

Tab. 1.9 – Caractéristiques principales des sinus cardinaux de la PSF d'une antenne rectangulaire de cotés L et l . Les valeurs numériques sont obtenues en prenant $\lambda = 5,66$ cm et $R = 1000$ km (cas d'ERS et d'ENVISAT).

- on a un signal modulé linéairement en fréquence spatiale, de paramètre \hat{K} , (cas temporel : signal modulé linéairement en fréquence de paramètre K),
- la bande de fréquence spatiale est $\hat{B} = \frac{\alpha}{L}$ (cas temporel : la bande de fréquence utile est B).

Puisque l'on connaît alors le résultat du filtrage adapté et la formule correspondante de l'ouverture 1.4, on en conclut directement que la résolution obtenue après filtrage adapté en azimut et en utilisant le même critère d'ouverture α s'exprime comme

$$\delta y_{\text{ouverture}} = \alpha \frac{1}{\hat{B}} = L$$

On en déduit la résolution de l'antenne synthétique, qui donne le pouvoir séparateur de deux cibles identiques :

$$\delta y = \frac{L}{2}.$$

Cette expression de la résolution d'un RSO est assez remarquable puisqu'elle ne dépend que de la dimension de l'antenne, sans faire intervenir les deux autres paramètres classiques de la résolution d'une antenne que sont la distance et la longueur d'onde. Cependant, il est facile de se convaincre de cet apparent paradoxe :

- plus l'antenne est petite, plus son lobe initial est grand. Une cible sera donc observée plus longtemps, et on a donc plus d'information sur elle permettant de la séparer de ses éventuelles voisines.
- plus une cible est éloignée, plus elle sera observée longtemps puisqu'un lobe d'antenne correspond en fait à une directivité angulaire commune à toutes les positions de cibles.
- plus la longueur d'onde est grande, moins l'antenne est directive. Comme dans le cas d'une antenne plus petite, la cible sera observée plus longtemps.

Le tableau suivant, qu'il est intéressant de comparer avec celui correspondant à la formulation en distance du filtrage adapté du signal Radar (voir tableau 1.5), donne les valeurs numériques dans le cas d'ERS (avec $\alpha = 1$).

\hat{K}	$\frac{1}{R\lambda}$	$1,767 \cdot 10^{-5}$	Ouverture initiale en azimut et dimension de l'antenne synthétique Bande de fréquence spatiale utile Facteur de compression résolution
\hat{Y}	$\frac{\lambda R}{L}$	$5,66 \cdot 10^3$ m	
$\hat{K}\hat{Y}$	$\frac{1}{L}$	$0,1 \text{ m}^{-1}$	
$\hat{K}\hat{Y}^2$	$\frac{\lambda R}{L^2}$	566	
R_y	$\frac{L}{2}$	5 m	

L'ouverture angulaire correspondant à l'antenne synthétique vue depuis le point imagé s'écrit (pour $\alpha = 1$) :

$$\delta\Psi = \frac{\hat{Y}}{R} = \frac{\lambda}{L} \quad (1.21)$$

Cette expression mène aux deux constatations suivantes :

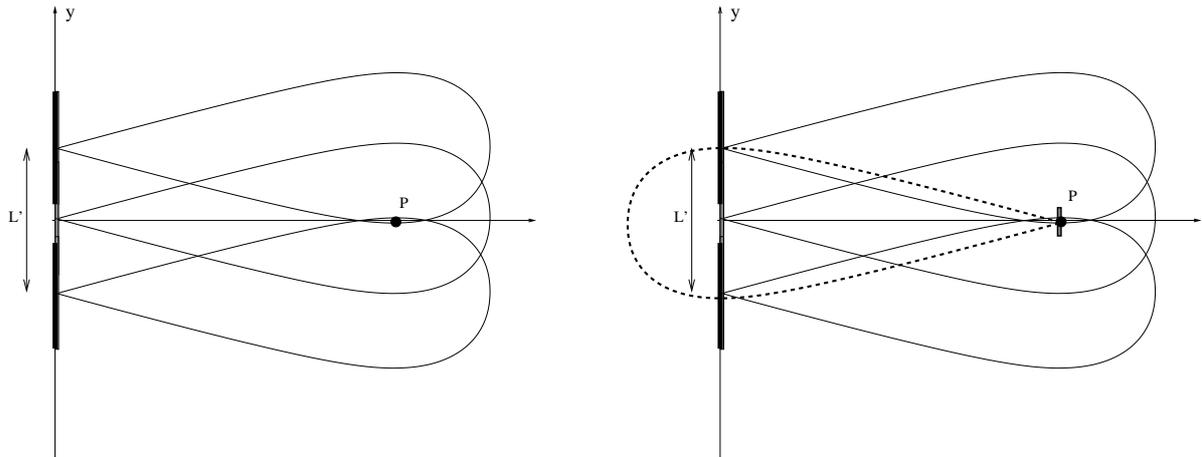


FIG. 1.8 – A gauche, le point P reçoit l'onde émise tant qu'il demeure dans le lobe principal de l'antenne initiale de dimension L . A droite : tout se passe comme si le point P émettait une onde dont le lobe principal a une dimension L' au niveau de l'antenne initiale. Donc tout se passe comme si le point P appartenait à une antenne de dimension L , c'est à dire une antenne ayant la dimension de l'antenne physique initiale.

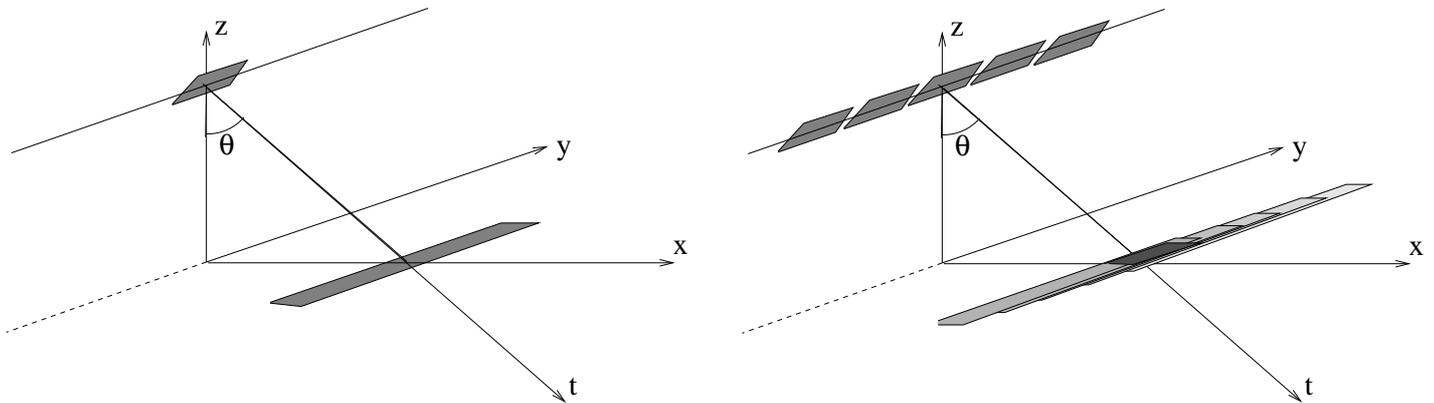


FIG. 1.9 – L'empreinte au sol d'une antenne réelle de 10m donne une zone d'illumination d'environ 5km. En d'autres termes, un objet au sol est visible si l'antenne réelle se situe dans une zone d'environ 5km. En juxtaposant 5km d'acquisition, le principe de la synthèse d'ouverture offre une résolution de la dimension de l'antenne réelle.

- plus L est petit, plus la résolution s'améliore, mais aussi plus l'angle apparent d'observation vis à vis de la cible est grand. Pour une cible isotrope, c'est sans conséquences ; pour une cible présentant un diagramme de directivité particulier, la synthèse telle qu'elle est présentée ne sera pas optimale.
- Diminuer la longueur d'onde (*i.e.* augmenter la fréquence) a pour conséquence de diminuer aussi cet angle de visée apparent. On réduit donc les effets d'anisotropie des cibles.

Notons enfin que, pour cette antenne synthétique, le point imagé se trouve en champ proche. En effet, on a

$$\frac{\hat{Y}^2}{2\lambda} = \frac{\lambda R^2}{2L} = \frac{\lambda R}{2L} R = 2830R$$

et les conditions de Fraunhofer ne sont plus du tout vérifiées. En pratique l'antenne synthétique a une courbure sphérique : cette observation est en fait équivalente à l'analyse des problèmes de migration lors de la synthèse.

Une formulation faisant intervenir le Doppler

Les expressions ainsi obtenues ne font aucune hypothèse sur le mouvement du porteur. Or, a priori, puisque l'émetteur est en mouvement par rapport au sol, on peut s'attendre à ce que l'effet Doppler modifie la fréquence de la porteuse. En supposant que l'antenne se déplace en mouvement rectiligne uniforme de vitesse v et que l'origine des temps corresponde au passage au "CPA", la distance émetteur-cible $r(t)$ s'écrit :

$$r(t) = \sqrt{R^2 + (vt)^2}$$

et la vitesse radiale v_r s'exprime comme :

$$v_r = \frac{\partial r(t)}{\partial t} = v \frac{vt}{r} = v \frac{y}{r} = v \sin \theta$$

On sait alors que, pour une fréquence f , le décalage Doppler s'écrit :

$$f_D = \frac{v}{c} \sin \theta f$$

En posant $y = vt$, la phase azimutale ϕ (expression 1.19) s'écrit

$$\begin{aligned} \phi &= j\pi \frac{\hat{K}}{2} y^2 \\ &= j\pi \frac{\hat{K}}{2} v^2 t^2 \end{aligned}$$

et la fréquence instantanée, qui s'obtient par dérivation temporelle cette fois, s'écrit :

$$\begin{aligned} f_i &= \hat{K} v^2 t \\ &= \frac{2}{R\lambda} v y \\ &= 2 \frac{y}{R} \frac{v}{c} f \\ &= 2 \sin \theta \frac{v}{c} f = f_D \end{aligned}$$

On retrouve donc exactement la formulation du Doppler, ce qui explique pourquoi un grand nombre d'auteurs font intervenir le Doppler dans la synthèse azimutale, bien que le formalisme de base ne fasse aucune hypothèse sur les effets du mouvement du porteur.

1.5 Le traitement des données RSO : Mise en œuvre

1.5.1 Principes de base

Le signal radar utilisé en imagerie satellitaire est en fait un signal bande étroite de largeur de bande Δf autour d'une fréquence centrale f_0 , que l'on peut appeler "porteuse". Le tableau suivant donne quelques exemples de valeurs usuelles en télédétection satellitaire.

	f_0	Δf
JERS	1.275 GHz	15 MHz
ALOS	1.270 GHz	14, 28 MHz
ERS	5.300 GHz	15.55 MHz
ENVISAT	5.331 GHz	16 MHz
Radarsat-1	5.300 GHz	11.6, 17.3, 30 MHz
Radarsat-2	5.405 GHz	11.6, 17.3, 30, 50, 100 MHz
SIR-X	9.6 GHz	10, 20 MHz
Terrasar-X	9.65 GHz	100 à 300 MHz
CSK	9.6 GHz	400 MHz

On voit qu'en pratique le signal est très bande étroite et ne requiert donc qu'une fréquence d'échantillonnage limitée, ce qui favorise l'acquisition de grandes fauchées.

En écrivant le signal temporel $s(t)$ à partir de son spectre $\hat{S}(f)$, on a :

$$s(t) = \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} \hat{S}(f) e^{2j\pi f t} df$$

et en ne considérant que la partie non nulle du spectre \hat{S} , on peut définir $\tilde{S}(f)$

$$\tilde{S}(f') = \hat{S}(f_0 + f')$$

ce qui permet d'écrire :

$$s(t) = e^{2j\pi f_0 t} \int_{-\frac{\Delta f}{2}}^{\frac{\Delta f}{2}} \tilde{S}(f) e^{2j\pi f t} df = e^{2j\pi f_0 t} \tilde{s}(t) \quad (1.22)$$

On définit ainsi un signal complexe \tilde{s} à partir du signal (réel) initial :

$$\tilde{s}(t) = e^{-2j\pi f_0 t} s(t)$$

Les signaux bruts (*RAW*) transmis au sol sont en fait les signaux “ramenés en bande de base” par une opération très classique de multiplication par le sinus et le cosinus de la porteuse, ce qui donne un signal complexe qui sera échantillonné à une fréquence compatible avec la bande passante (typiquement, on rajoute une légère marge : par exemple, ERS est échantillonné à 18.96 MHz alors que la bande occupe 15,55 MHz). On accède alors au signal $\tilde{s}(t)$:

$$\tilde{s}(t) = \int_{-\frac{\Delta f}{2}}^{\frac{\Delta f}{2}} \tilde{S}(f) e^{2j\pi f t}$$

et on parle d'échantillonnage “temps lent”.

Si l'on souhaite donc appliquer un retard τ sur le signal $s(t)$, on voit que deux étapes sont à prévoir :

- un déphasage sur la partie monochromatique, puisque dans ce cas, un retard se traduit par un déphasage.
- un rééchantillonnage du signal $\tilde{s}(t)$, qui se calcule dans la bande passante Δf (signal “temps lent”).

1.5.2 Compression en distance

Le signal émis est connu avec une grande précision : les paramètres correspondants, voire la forme du signal sont fournis dans les données auxiliaires. Le filtrage adapté se réalise alors sans problème majeur, d'autant qu'il est aisé à effectuer par passage dans le plan de Fourier dans lequel une simple multiplication suffit.

En effectuant une transformée de Fourier sur les colonnes des données brutes et en moyennant toutes les lignes ainsi obtenues, on retrouve la forme de la PSF selon la direction azimutale. Comme le pointage de l'antenne n'est jamais parfaitement réalisé, ce spectre moyen n'est pas centré à l'origine. Le décalage avec l'origine, qui traduit le dépointage, s'appelle le Doppler centroid.

1.5.3 Méthodes classiques de synthèse (mode *Stripmap*)

Considérons un point que l'on souhaite imager par synthèse d'ouverture. Le principe de la synthèse d'ouverture consistera donc à prendre, sur chaque ligne du signal, la contribution de cette cible.

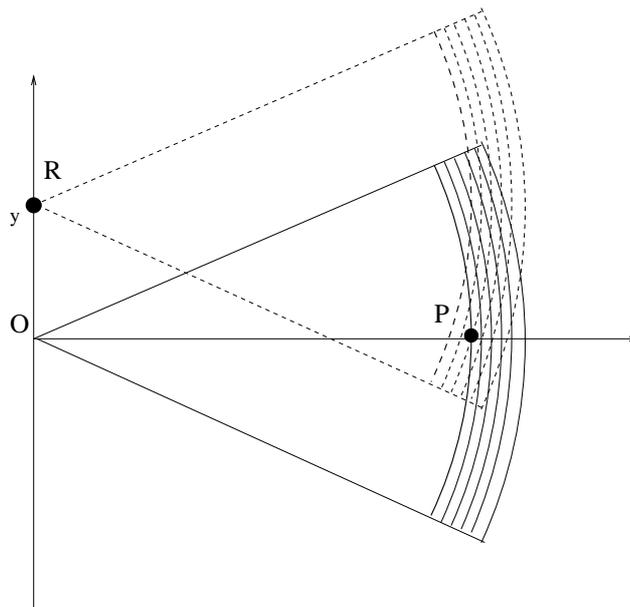


FIG. 1.10 – Illustration de la migration : le point P est vu dans des cases distance différentes selon qu'il est vu lors du passage au CPA (distance minimale) ou sur les bords de l'antenne synthétique.

Or nous avons vu que, vu par l'antenne synthétique, la cible était alors en champ proche et que l'antenne avait une courbure non négligeable. La figure 1.10 montre un exemple où l'on comprend bien que la prise en compte de cette courbure va requérir une prise en compte du retard, puisque sur cet exemple on voit que le point P imagé appartient à plusieurs cases distance selon l'élément considéré sur l'antenne synthétique.

Ce problème de migration est le plus délicat de la synthèse car il interdit un simple filtrage adapté selon la direction azimutale des images et que la migration dépend de la distance au CPA.

Un grand nombre de travaux ont été menés pour pouvoir ramener quand même le filtrage azimutal à un simple produit dans l'espace de Fourier : citons par exemple, le changement de variable dit de Stolt, ou l'algorithme $\Omega-K$. Tous ces travaux avaient pour but de produire des scènes complètes de type ERS dans un délai raisonnable, c'est à dire une nuit (ceci dans les années 1995).

Il peut être plus fructueux de repartir sur une reconstruction dans le domaine temporel, d'autant que les calculateurs actuels le permettent sans trop de difficultés et de temps. Pour cela, considérons le point P et la distance $r(y)$ entre ce point et un point de l'antenne synthétique R situé en y . Le même développement limité introduit dans l'approximation de Fraunhofer permet d'écrire :

$$r = R + \frac{y^2}{2R}$$

Dans le cas d'ERS, cette valeur va varier entre 0 et environ 20m, c'est à dire

- de 0 à 3 cases distance
- de 0 à 350 longueurs d'onde

ce qui fait que les deux étapes sont à entreprendre :

- Pour la partie "temps rapide", il suffit d'appliquer un déphasage correspondant à cette distance, c'est à dire une multiplication par l'exponentielle complexe :

$$e^{2j\pi\frac{ry}{\lambda}}$$

- Pour la partie "temps lent", il faudra appliquer un rééchantillonnage sub-pixelique à l'intérieur de la bande passante : par exemple, les recommandations du JPL pour synthétiser les données SIR-C suggéraient de suréchantillonner le signal d'un facteur 32.

A ce stade, la synthèse décrite comme un filtrage adapté peut s'effectuer par une sommation complexe des données.

Le vrai problème est donc de connaître R , ce qui n'est pas trivial puisque, si le satellite décrit une trajectoire dans son plan orbital, le point sur la Terre effectue une rotation en 23 heures 56 minutes, avec une vitesse dépendant de la latitude et de l'altitude locale.

1.5.4 Un exemple sur des données ERS

La figure 1.11 montre les diverses étapes d'une synthèse effectuée sur le massif du Mont Blanc. La synthèse a été effectuée avec un outil de Télécom ParisTech : SYTER (SYnthèse TEm porelle Radar) qui a la caractéristique d'effectuer le traitement dans le domaine temporel (dons sans filtrage adapté en azimut).

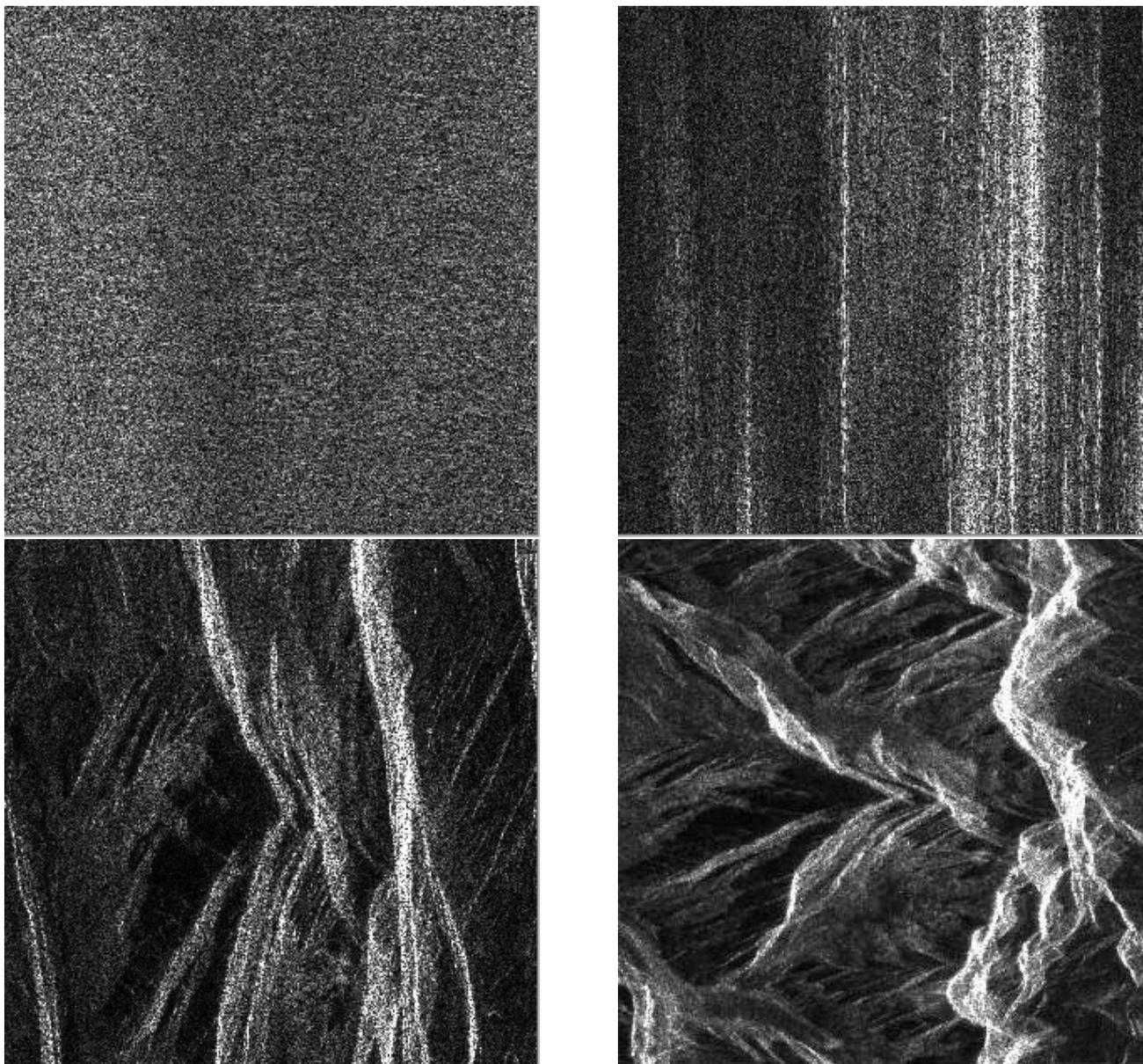


FIG. 1.11 – Principe de la synthèse d'Ouverture sur des données acquises sur l'aiguille Verte (massif du Mont Blanc). Image brute ERS-RAW (en haut à gauche, ©ESA), filtrage adapté en distance (en haut à droite), synthèse d'ouverture (en bas à gauche), image multivue (en bas à droite).

1.5.5 Caractéristiques globales des données synthétisées

Une fois effectuées les deux étapes fondamentales de traitement RSO (compression d'impulsion et synthèse d'ouverture), on peut dire très schématiquement que tout se passe comme si on avait un signal très bref et une très grande antenne :

- selon l'axe temporel, le résultat du filtrage adapté fait que tout se passe comme si la PSF selon l'axe temporel était un sinus cardinal (relation 1.13)
- selon l'axe azimut, tout se passe comme si l'antenne avait la dimension kilométrique (voire plus) requise pour garantir une résolution métrique. Là aussi, la PSF est de type sinus cardinal puisque la réponse d'une antenne linéaire vérifie cette formulation (relation 1.16)

On peut alors exprimer la PSF $\tilde{U}(x, y)$ d'un système imageur RSO :

$$\tilde{U}(x, y) \sim \text{Sinc}(\pi\tilde{B}_x x) \text{Sinc}(\pi\tilde{B}_y y) \quad \tilde{B}_x = \frac{1}{\delta_x} = \frac{2B}{c} \quad \tilde{B}_y = \frac{1}{\delta_y} = \frac{2}{L} \quad (1.23)$$

expression dans laquelle on retrouve les caractéristiques de base du système RSO : B la bande passante du *chirp* et L la dimension physique de l'antenne le long de la trajectoire du capteur.

1.6 Les différents modes d'acquisition et d'images

Construire une antenne synthétique peut s'effectuer de diverses manières, à l'instar des capteurs de seconde génération (Terrasar-X, CSK, ...).

Tout d'abord, on peut jouer sur le pointage azimutal de l'antenne pour améliorer la résolution azimutale :

- mode *stripmap* : c'est la technique exposée ci dessus. L'antenne pointe dans une direction fixe, et la synthèse d'un point s'effectue en prenant en compte toutes les acquisitions telles que le point appartienne au lobe d'antenne de chaque position de l'antenne physique (figure 1.12 gauche).
- mode *spotlight* : la direction de l'antenne varie au cours du temps de sorte que la zone imagée reste le plus longtemps possible dans le lobe de l'antenne physique. Pour cela on dépointe l'antenne en faisant varier ce dépointage d'antenne entre le début et la fin des acquisitions (figure 1.12 droite). De la sorte, la dimension de l'antenne synthétique est plus grande que dans le cas précédent : la résolution est donc améliorée.

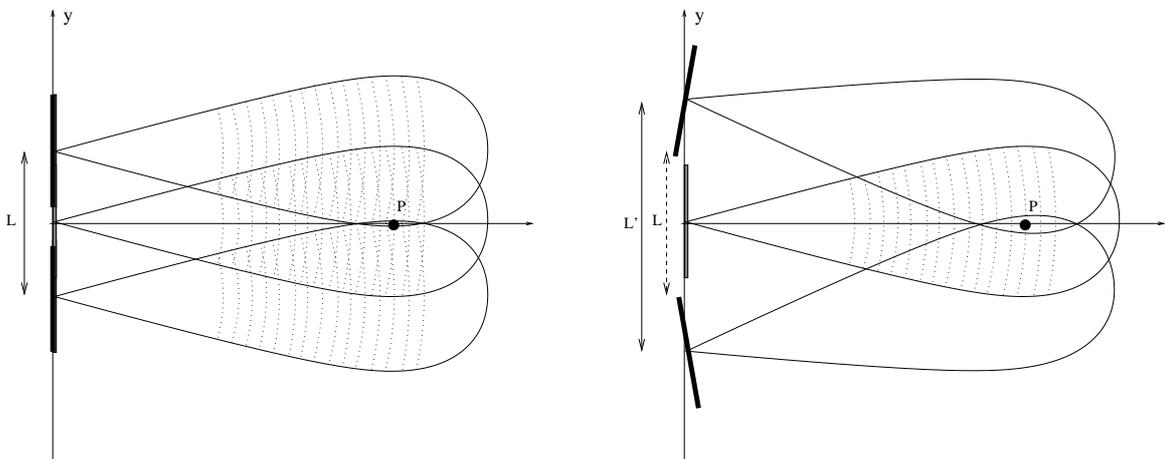


FIG. 1.12 – A gauche, mode *stripmap* : le point P est imagé sur une longueur L d'antenne synthétique. A droite, mode *spotlight* : l'antenne pivote pour observer plus longtemps le point P de sorte que l'antenne synthétique a une longueur L' plus grande que dans le cas *stripmap*, et donc une résolution améliorée.

Ensuite, si l'on veut augmenter la fauchée (limitée par la dimension verticale de l'antenne physique), on peut, grâce aux propriétés de la focalisation électronique, orienter le faisceau avec des angles différents permettant ainsi d'avoir une fauchée globale plus grande : c'est le principe du mode *scansar*. La figure 1.13 illustre ce concept avec trois angles d'incidence consécutifs, ce qui augmente d'un facteur 3 la fauchée globale, mais réduit aussi d'un facteur 3 la FRI. Pour une incidence donnée, l'acquisition se fait donc avec trois fois moins de données et on en déduit que, si les critères de Shannon ont été correctement pris en compte, la résolution est dégradée d'un facteur 3.

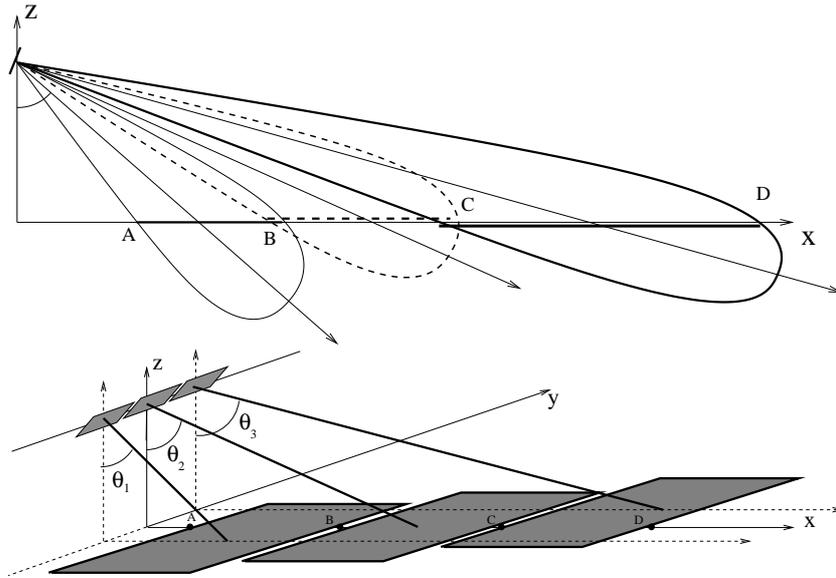


FIG. 1.13 – Mode scanar : l’antenne électronique pointe consécutivement selon des angles d’incidence différents. Successivement on couvre ainsi, le long de la fauchée, le segment AB (avec une incidence centrale θ_1), puis le segment BC (avec une incidence centrale θ_2) et enfin le segment CD (avec une incidence centrale θ_3). Tout se passe comme si, pour une incidence donnée, on avait une PRF réduite (ici divisée par 3, figure du bas), ce qui se traduit par un échantillonnage azimutal dégradé d’un facteur 3.

1.7 Géométrie des images RSO

Dans ce paragraphe, pour simplifier la présentation et les expressions, la Terre est plate et les ondes sont localement planes. Vu la géométrie des acquisitions satellitaires, il est quasiment toujours possible de faire l’hypothèse d’ondes localement plane. En revanche, la rotondité de la Terre serait à prendre en compte, surtout pour les grandes fauchées (ERS, modes ScanSar).

1.7.1 Principe : hypothèse de sol plat

Les systèmes RSO sont donc des radar à visée latérale. Le signal reçu est échantillonné (temporellement) : on a donc des cases temporelles dont la dimension δt est dictée par le choix de l’échantillonneur. Puisque l’on suppose que la célérité des ondes électromagnétiques est constante (et égale à la célérité de la lumière), en prenant en compte le trajet aller-retour, on obtient des cases distances δr vérifiant :

$$\delta r = \frac{c\delta t}{2}.$$

Le fait d’illuminer latéralement la scène avec un angle d’incidence θ se traduit par une relation assurant le passage entre case distance et case sol (c’est à dire le GSI *Ground Sample Interval*) :

$$\delta x = \frac{\delta r}{\sin \theta} \quad (1.24)$$

L’équation 1.24 mérite une première analyse rapide :

- le terme en $\sin \theta$ au dénominateur est toujours plus petit que 1. Donc plus l’angle θ est petit, plus la taille de la case sol augmente. Le cas ultime est celui où $\theta = 0$: la taille de la case sol est alors infinie, tous les points du sol sont illuminés au même moment (revoir la figure 1.3 gauche). C’est le principe du radar altimétrique, qui n’a pas pour objectif de faire une image du sol.
- le terme en $\sin \theta$ au dénominateur est égal à 1 pour $\theta = 90^\circ$. Dans ce cas, il n’y a pas d’effets pénalisant liés à l’incidence. Cependant, ce cas est totalement utopique car il suppose que le sol est parfaitement plan. Tout élément de relief ou de sursol (bâtiment, ...) aura une ombre masquant tous les objets situés plus loin (revoir la figure 1.3 droite).

Même si les satellites semblent éloignés de la Terre, il n’en demeure pas moins que certains effets géométriques prennent en compte la distance entre le point d’observation et le capteur. Par exemple, comme l’altitude du satellite est de quelques centaines de kilomètres (une valeur finie), et que la zone d’observation (fauchée) peut atteindre

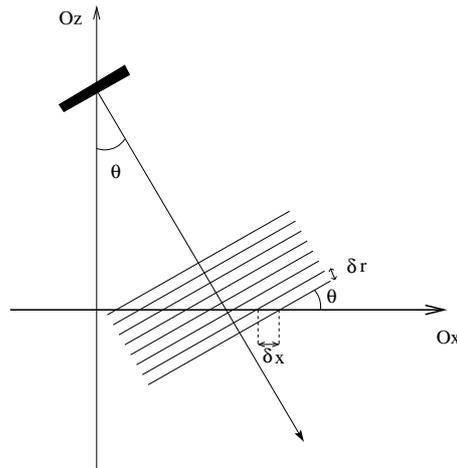


FIG. 1.14 – Principe de l'écholocation radar et passage de la case distance à la case sol (GSI). Le radar est en visée latérale et émet des ondes planes faisant un angle θ avec le sol. Le signal est échantillonné selon l'axe de visée du radar d'un pas δr , ce qui correspond au sol à un pas δx .

100 km (cas d'ERS en stripmap), l'incidence en un point varie depuis le *near range* jusqu'au *far range*. Pour cela considérons la figure 1.15. Le point O est au nadir du satellite S (OS est vertical au sol). Si l'on connaît l'altitude du satellite h , on a pour tout point P du sol :

$$\theta_P = \text{Atan}\left(\frac{OP}{h}\right) \quad (1.25)$$

Par exemple, pour ERS (fauchée fixe de 100km), l'incidence en début de fauchée, θ_1 , est de l'ordre de 19° : il est alors facile de montrer que l'incidence en fin de fauchée, θ_2 est de l'ordre de 26° . La figure 1.16 (gauche) montre la variation de l'angle d'incidence le long de la fauchée dans le cas du satellite ERS.

Dans le cas de Terrasar-X, $\delta r = 1\text{m}$ (PRF=150MHz) et la fauchée peut atteindre environ 30 km. Pour une incidence en début de fauchée de 45° , le GSI sera de 1,435m. En fin de fauchée, l'incidence est alors de $46,60^\circ$ et le GSI est de 1,395 m. (figure 1.17).

ERS : $\delta r = 7,9\text{ m}$		TSX : $\delta r = 1\text{ m}$	
Incidence	GSI	Incidence	GSI
19°	24,3m	45°	1,435m
26°	18,0m	$46,60^\circ$	1,395 m

En observant la figure 1.15 et la formule 1.24, on constate donc que le GSI diminue le long de la fauchée (diminution de 25% environ pour ERS et de 3 % pour Terrasar-X). Si l'on connaît la position x_P d'un point du sol (P) par rapport au Nadir (O), on en déduit l'incidence locale (formule 1.25), ce qui donne pour la case sol :

$$\delta x_P = \frac{\delta r}{\sin \theta_P} = \delta r \sqrt{1 + \left(\frac{h}{x_P}\right)^2}$$

Cette expression peut s'appliquer pour calculer la variation du GSI le long de la fauchée dans le cas du satellite ERS (figure 1.16 droite) et dans le cas du satellite Terrasar-X (figure 1.17 droite).

Le fait d'avoir un GSI variable (strictement décroissant) le long de la fauchée est un problème délicat dès lors que l'on souhaite analyser deux images. En effet, si les paramètres d'acquisition ne sont pas exactement les mêmes (par exemple une légère différence d'altitude), la position d'un point vis à vis du nadir ne sera pas la même pour les deux satellites et l'incidence locale va donc changer en ce point. On aura alors deux images qui pourront apparemment se superposer au début, mais qui au fur et à mesure que l'on s'éloigne du far range, se décaleront. C'est un problème bien connu des échelles variables⁴ La figure 1.18 montre un exemple d'une règle à pas variable : un décalage d'une fraction de pas à gauche se traduit par un décalage d'un pas entier à droite.

Aussi l'utilisation de jeux d'images RSO nécessitent des étapes de recalage avant tout traitement.

⁴En particulier, si l'on choisit une échelle logarithmique, on réinvente la règle à calcul !!

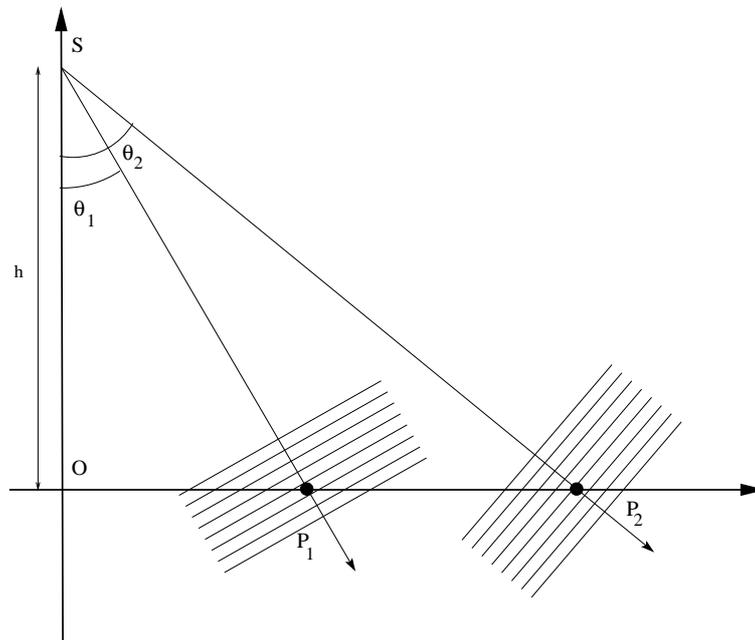


FIG. 1.15 – Capteur RSO illuminant le sol depuis le début de fauchée (*near range*) et la fin de fauchée (*far range*). L'angle d'incidence varie entre θ_1 et θ_2 . Dans le cas d'ERS, l'incidence varie entre 19° et 26° . Comme la résolution radiale est de 7,9m, on en déduit que la résolution "sol" varie de 24,3m à 18,0m.

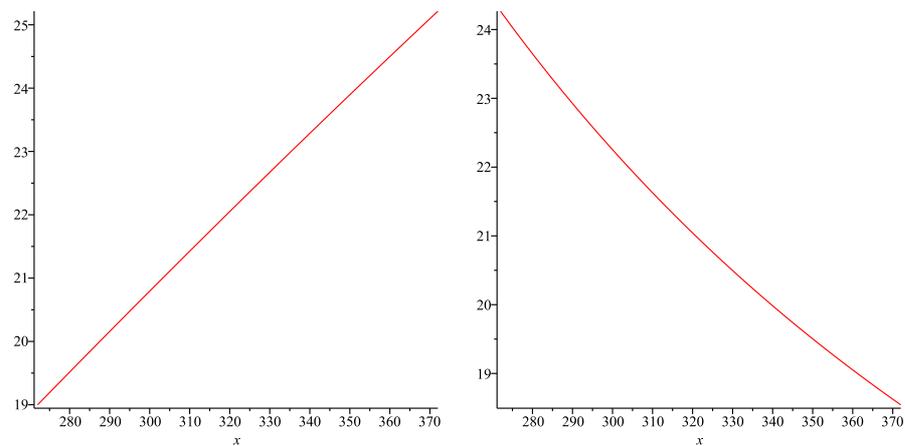


FIG. 1.16 – Variation de l'angle d'incidence (à gauche) et du GSI (à droite) le long de la fauchée pour les données ERS (distance au Nadir entre 272 km et 372 km). Attention, la Terre est supposée être plane !!

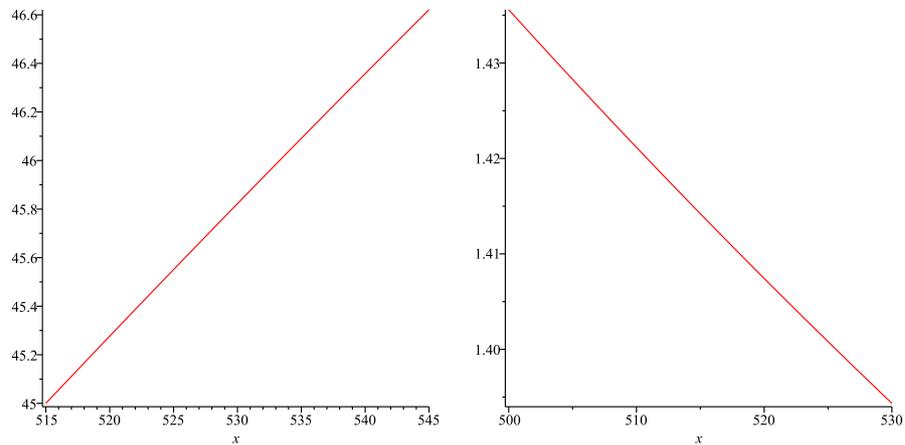


FIG. 1.17 – Variation de l'angle d'incidence (à gauche) et du GSI (à droite) le long de la fauchée pour les données Terrasar-X (distance au Nadir entre 515 km et 545 km, angle d'incidence en début de fauchée de 45°). Attention, la Terre est supposée être plane !!

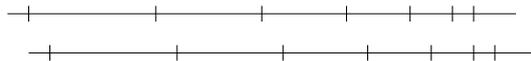


FIG. 1.18 – Effet d'une translation d'une règle à pas non constant. Un décalage d'une fraction de pas (à gauche) se traduit par un décalage d'un pas entier (à droite).

1.7.2 Variation de l'échantillonnage en fonction de la pente locale

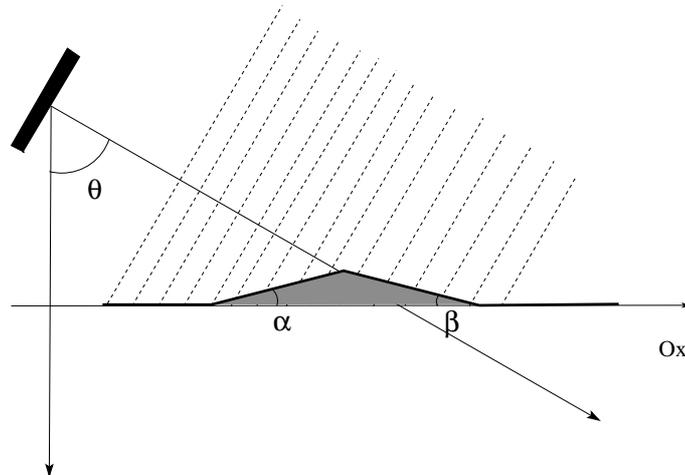


Fig. 1.19 – Variation locale de la pente du sol. L'incidence locale et le GSI varient en fonction de cette pente. Lorsque la pente s'oriente vers le capteur, l'incidence locale décroît et on a $\delta x = \frac{\delta r}{\sin(\theta - |\alpha|)}$: la case distance augmente de taille et on perd en pouvoir séparateur. En revanche, lorsque la pente s'aligne dans le sens de l'onde incidente, l'incidence locale augmente et on a $\delta x = \frac{\delta r}{\sin(\theta + |\beta|)}$: la case distance diminue de taille et on gagne en pouvoir séparateur.

Si le sol n'est pas plan, il faut prendre en compte la pente locale du terrain pour déterminer la projection de la case distance sur le sol (figure 1.19). Il est facile d'adapter la relation 1.24 à ce cas, qui peut être abordé en traitant les deux cas possibles :

- la pente devient positive et le terrain se redresse face au capteur. On a alors :

$$\delta x = \frac{\delta r}{\sin(\theta - |\alpha|)}$$

Cette valeur augmente jusqu'au cas critique $\alpha = \theta$, analogue au cas de la visée verticale.

- la pente est négative et le terrain a une pente dirigée dans la direction opposée au capteur. On a alors :

$$\delta x = \frac{\delta r}{\sin(\theta + |\beta|)}$$

Cette valeur diminue jusqu'à la valeur limite $\delta x = \delta r$ identique au cas de la visée horizontale. Au delà on entre dans l'ombre du faisceau radar (voir l'exemple du paragraphe suivant).

1.7.3 Ombre et repliement

Les images RSO sont entachées d'artefacts liés à ces valeurs critiques :

- Si la pente se redresse au delà de la valeur $\alpha = \theta$, on observe le phénomène de repliement : la zone imagée va se confondre avec des données du sol plat se trouvant dans la même case distance. On parle alors de repliement.
- Si la pente dépasse l'autre valeur critique $\theta + |\beta| = 90^\circ$, un phénomène d'ombrage empêchera la zone d'être illuminé par l'onde incidente.

La figure 1.20 donne une illustration de ces deux phénomènes : le point *B* est replié sur le point *A*, et les points entre les points *C* et *D* sont dans l'ombre de l'objet et ne seront donc pas visibles.

1.7.4 Cas d'école : structure pyramidale

Pour analyser le problème du choix de l'angle d'incidence, nous allons analyser le cas d'une pyramide (figure 1.21). Pour un angle d'incidence plutôt élevé (60°), la face de la pyramide dirigée vers le radar est bien analysée ; seulement, vu la pente propre de la pyramide, la face opposée de la pyramide est dans l'ombre.

En revanche, pour un angle d'incidence plutôt faible (30°), c'est la face de la pyramide orientée vers le radar qui pose problème car il fait apparaître le phénomène de repliement : les points de cette face appartiennent à des cases distance correspondant aussi à des points du sol. Par exemple, sur cette figure 1.21, on voit que les points *B* (face vers le radar) et *C* (point du sol devant la pyramide) sont dans la même case distance. De plus, à cause de la géométrie propre aux pyramides, le point *C* (face opposée au radar) sera lui aussi dans cette même case distance.

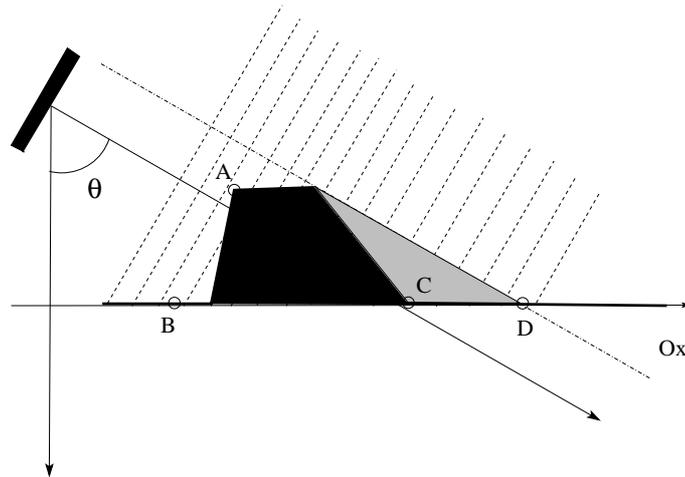


FIG. 1.20 – Exemple de repliement et d’ombre. Le point B est dans la même case distance que le point A : on parle de repliement. A cause de l’ombre créé par l’objet, tous les points entre C et D ne seront pas imagés.

1.7.5 Comparaison optique radar

Entre un système radar à visée latérale et un capteur optique dépointé (c’est à dire ne visant pas à la verticale), il existe beaucoup d’analogies. Pour un système radar visant avec un angle d’incidence θ , il y a donc des effets (ombres, repliements) qui nuisent à la lisibilité de l’image. Ces effets sont identiques à ceux observés avec un imageur optique visant à 90° par rapport à la direction d’émission du système radar, donc avec un angle d’incidence $90^\circ - \theta$ (voir figure 1.23) : seules les ombres (parties du sol non illuminées par l’onde incidence car masquées par du relief interposé) et les repliements (*i.e.* les parties du sol confondus dans la même case distance) diffèrent entre les deux systèmes (voir figure 1.24).

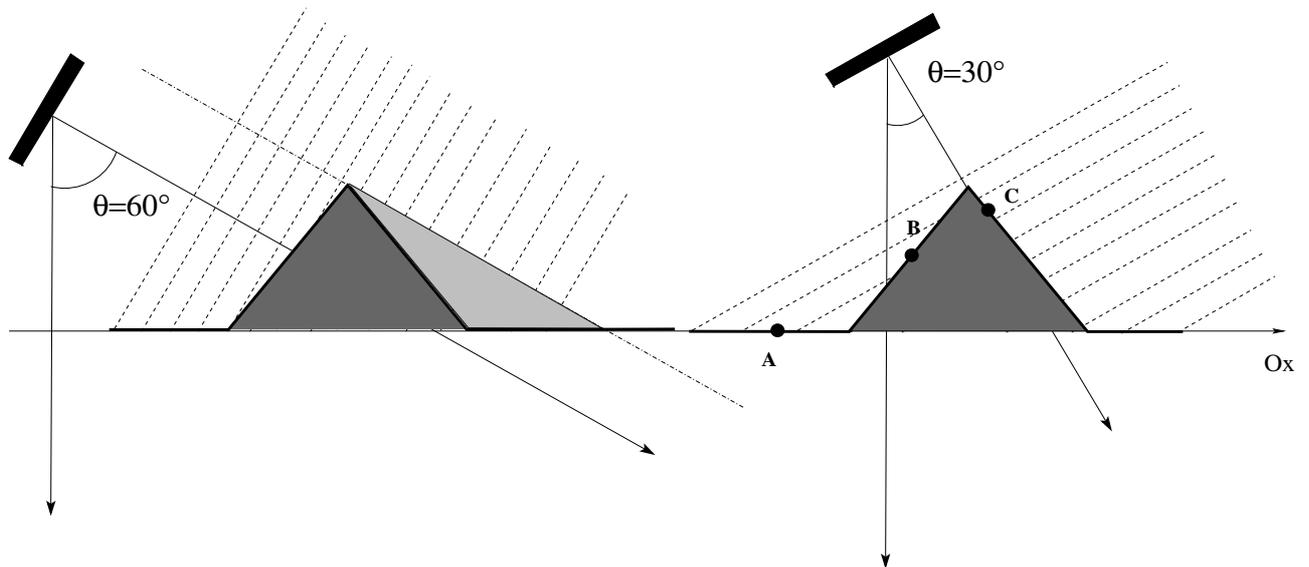


FIG. 1.21 – Effets d’une modification de l’incidence en visée latérale. A gauche, l’angle est de 60° . Au début de la fauchée chaque point du sol et de la pyramide correspondent à des cases distances différentes. Mais, comme la pente de la pyramide est plus raide que la visée, un phénomène d’ombre apparaît pour la face de la pyramide orientée dans la direction opposée au capteur : les points de cette surface ne peuvent être illuminés par le radar (l’onde se propage en première approximation en ligne droite comme la lumière). A droite, l’angle est de 30° . Les points non visibles dans le cas précédents seront visibles : cependant, ils seront “repliés” sur des points situés sur le sol (plan) et sur la façade de la pyramide orientée vers le capteur. Par exemple, les points A, B et C appartiennent à la même case distance.

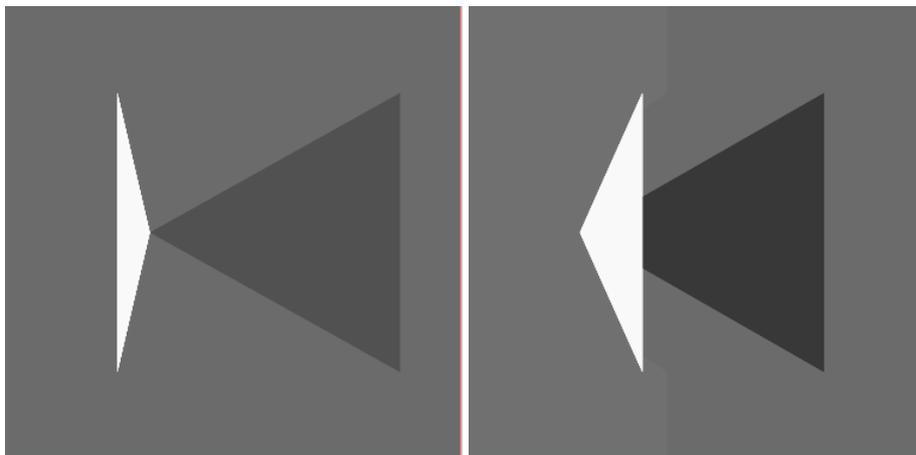


FIG. 1.22 – Simulation d’images RSO acquises sur une pyramide..

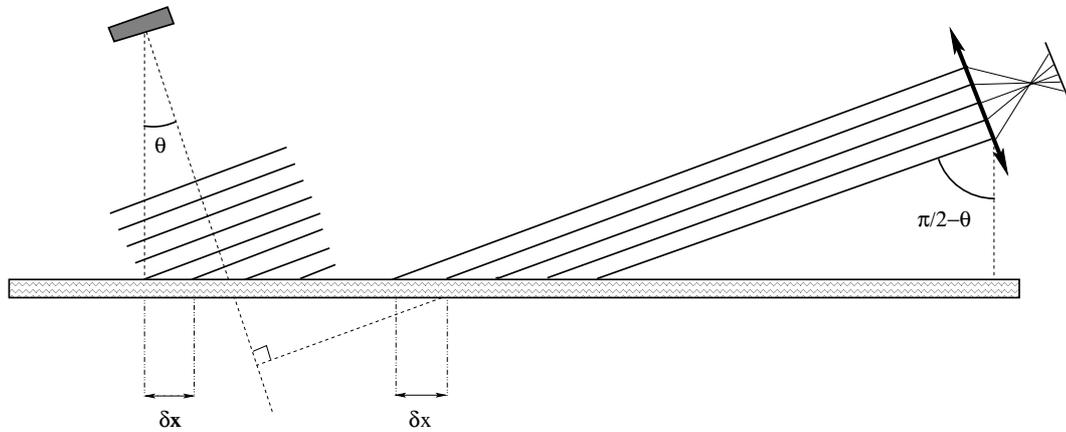


FIG. 1.23 – Radar à visée latérale émettant des ondes planes (à gauche) : la résolution au sol s'exprime en fonction de l'angle d'incidence θ , qui, dans cet exemple où le sol est plat, est identique à l'angle d'émission. Capteur optique (à droite) visant à l'infini avec une incidence $\frac{\pi}{2} - \theta$: on a une résolution identique au sol et les mêmes effets de déformations géométriques en sol plat que ceux observés en imagerie Radar.

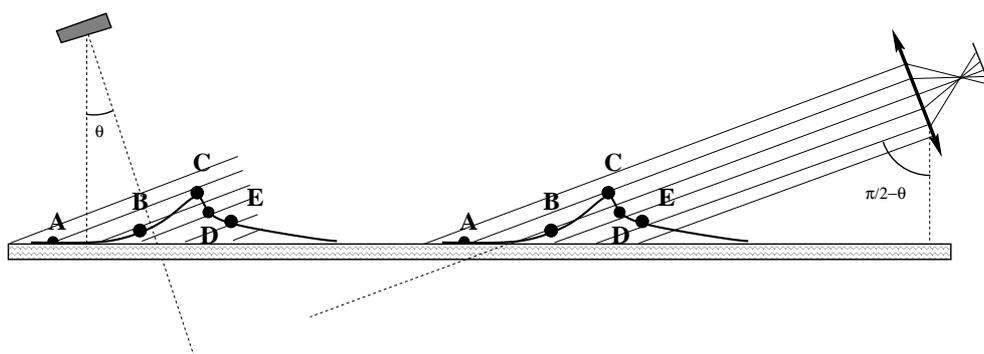


FIG. 1.24 – Radar à visée latérale émettant des ondes planes (à gauche) : les points A et C appartiennent à la même case distance (effet de repliement) et le point D n'est pas illuminé (effet d'ombre). Capteur optique (à droite) imageant la même zone de relief : le point B n'est pas visible, tandis que la résolution entre les points C et E est meilleure que celle en sol plat (effet de pente).

Chapitre 2

Le traitement des images RSO



Après avoir traité des principes fondamentaux de la formation des images RSO, nous allons aborder les problèmes liés au traitement des images RSO. En effet, contrairement aux images habituelles, les images RSO ont une apparence granuleuse qui est la conséquence des sommations cohérentes effectuées tant par les mécanismes physiques de la rétrodiffusion que par les outils de traitement lors de la synthèse. Ce chatoiement, intrinsèque à l'imagerie cohérente¹, présente donc des caractéristiques très spécifiques qui seront abordées dans le premier paragraphe et qui ont pour conséquences de faire apparaître un bruit multiplicatif sur les images. Tout ceci conduit donc à définir des techniques de traitement d'images spécifiquement dédiées à ce type d'images qui seront détaillées au paragraphe 2.3.

2.1 Que voit-on sur une image RSO

2.1.1 Analyse d'une image RSO

L'interprétation d'une image RSO n'a rien d'évident pour un néophyte. En effet, l'utilisation d'une illumination cohérente va provoquer, en cas de multiréflexions, l'apparition d'un phénomène nouveau : le chatoiement. Mais, dans le même temps, s'il n'existe qu'une seule cible dans la cellule de résolution, la PSF du capteur (le produit de sinus cardinaux en distance et en azimut, formule 1.23) peut provoquer des artefacts : l'apparition des lobes secondaires qui vont polluer les pixels voisins.

Le chatoiement, qui correspond à un nombre très grand de cibles élémentaires dans une cellule de résolution, est un phénomène gênant car il dégrade la lisibilité de l'image. Néanmoins, nous verrons que ce phénomène peut être modélisé et des techniques de traitement spécifique peuvent être mis en œuvre.

Les cibles isolées peuvent aussi être abordées et modélisées lorsque leur géométrie n'est pas trop compliquée. Par exemple ([7]), pour une longueur d'onde λ donnée, on connaît la RCS (*Radar Cross Section*) des cibles suivantes (dites canoniques) :

- la sphère de rayon a :

$$\sigma_{sphere} = \pi a^2$$

qui est omnidirectionnelle et indépendant de la longueur d'onde,

- la plaque rectangulaire de cotés a et b :

$$\sigma_{plaque} = \frac{4\pi a^2 b^2}{\lambda^2}$$

dont les directivités sont $\simeq \frac{4}{a}$ et $\simeq \frac{4}{b}$,

- le dièdre avec $a < b$ (b correspond à l'axe du dièdre) :

$$\sigma_{dièdre} = \frac{8\pi a^2 b^2}{\lambda^2}$$

qui, s'il est correctement orienté, rétrodiffuse exactement dans la direction d'émission (même si l'on tourne la cible selon l'axe du dièdre d'un angle de l'ordre de $\pm 20^\circ$) et qui a une directivité $\simeq \frac{4}{b}$ dans la direction perpendiculaire au dièdre,

- le trièdre de côté a :

$$\sigma_{trièdre} = \frac{4\pi a^4}{3\lambda^2}$$

qui, s'il est pointé selon sa diagonale principale, rétrodiffuse exactement dans la direction d'émission (même si l'on tourne la cible selon les deux axes du dièdre d'un angle de l'ordre de $\pm 20^\circ$).

Cependant, il faut bien reconnaître que l'analyse proposé dans ce document est assez simpliste et que, dans le monde réel, le mélange de cibles et de chatoiement –non traité donc dans ce texte– correspond à la majeure partie des situations rencontrées.

2.1.2 Le chatoiement

L'imagerie cohérente, qui suppose l'illumination de la scène observée par une source cohérente et que l'on rencontre tout aussi bien en imagerie radar (ondes électromagnétique), en imagerie optique (utilisation d'un laser) ou en acoustique (en échographie médicale ou en sonar), a des propriétés bien particulières dès lors que l'on s'intéresse au signal rétrodiffusé par une surface ou par un volume. En effet, la prise en compte d'un grand nombre de cibles élémentaires, censées représenter le milieu diffusant, conduit à l'apparition du phénomène de chatoiement

¹Le chatoiement n'apparaît pas dans les images dites naturelles car leur construction prend en général uniquement compte de l'énergie des photons et non de leurs possibles interactions ondulatoires.



FIG. 2.1 – Cibles canoniques. A gauche, trièdre en bordure du glacier d’Argentière. A droite, dièdre dépolarisant en test à Argentière.

(*speckle*) dont la conséquence la plus remarquable est que la rétrodiffusion d’un milieu homogène est en général un signal non constant et d’apparence bruitée.

Cette propriété essentielle tient au fait que l’on illumine la zone d’analyse par des ondes cohérentes, et que la rétrodiffusion élémentaire de chaque cible opérera par sommation cohérente.

Pour analyser ce phénomène, qui a des conséquences capitales pour le traitement des images RSO, on va s’attacher à décomposer le problème selon les étapes suivantes :

- que se passe-t-il lorsque l’on utilise une onde monochromatique pour imager une zone avec une infinité de diffuseurs élémentaires quasi ponctuels ?
- que se passe-t-il lorsque l’on utilise un signal ayant un support limité dans le temps ?
- comment “jongler” entre les lois du signal complexe et celles des images (tant en amplitude qu’en intensité) ?
- que se passe-t-il lorsque l’on ramène le signal dans une bande de fréquence permettant une numérisation et une analyse numérique ?

Après cette analyse, qui nous conduira à comprendre les lois statistiques sous jacentes au phénomène de chaotisme, nous aborderons les techniques spécifiques à l’analyse et au filtrage de telles images. Notons d’ailleurs qu’à quelques détails près, ces techniques sont applicables pour toute image issue d’un système imageur cohérent (images RSO, échographiques, lidars, ...).

Illumination cohérente

Une onde monochromatique monodimensionnelle selon un axe donné Ox , par essence exemple d’illumination cohérente, est un objet sans grande réalité physique : en effet, elle correspond à un signal stationnaire qui, par essence, a une durée infinie, ni origine, ni fin, et qui, sous sa forme réelle peut toujours se ramener à l’expression réelle :

$$s(t) = \cos(\omega t - 2\pi kx) = \cos 2\pi(ft - kx),$$

ou en complexe :

$$s(t) = e^{j(\omega t - 2\pi kx)} = e^{2\pi i(ft - kx)}.$$

f est la fréquence, ω la pulsation et $k = \frac{1}{\lambda}$ le nombre d’onde.

L’onde est invariante par une translation égale à $p\lambda$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Si le milieu présente une vitesse de propagation c , on relie la longueur d’onde λ et la fréquence f par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

L’onde est invariante par une translation temporelle de durée $p\frac{1}{f}$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Supposons que le milieu analysé soit constitué de N objets positionnés sur l’axe Ox , et dont on connaît les positions $x_i, i \in [1, N]$. On posera aussi comme hypothèse que ces objets peuvent être considérés comme des cibles parfaitement ponctuelles dont les réponses impulsionnelles sont des distributions de Dirac. On peut alors écrire que l’objet i agit comme un filtre linéaire parfait sur l’onde incidente et se comporte comme une nouvelle source :

$$s(t) \star \delta\left(t - \frac{x_i}{c}\right)$$

Une première conséquence de cette illumination par une onde monochromatique est que l'on ne peut distinguer l'onde réémise par la cible i et celle qui serait réémise par une cible positionnée en :

$$x_i + p\lambda \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation montre donc le problème majeur de l'inagerie cohérente : l'utilisation d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ ne fournit de l'information que sur l'échelle de la longueur d'onde et "replie" l'information à l'intérieur d'une arche unique de l'onde incidente. Cette propriété aura une grande importance en interférométrie puisque, utilisée par exemple en sismique, cette discipline permet d'analyser des variations inférieures à la longueur d'onde et se montre défaillante dès lors que les mouvements de la croûte terrestre dépassent la longueur d'onde.

Une seconde conséquence du principe de l'illumination par une onde monochromatique est que la somme de deux ondes réfléchies est une onde monochromatique s'exprimant comme l'onde initiale. En effet, il est facile de montrer par identification que :

$$a_1 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right) + a_2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_2}{c}\right)\right) = a_3 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x_3}{c}\right)\right).$$

De même :

$$a_1 e^{j\omega\left(t - \frac{x_1}{c}\right)} + a_2 e^{j\omega\left(t - \frac{x_2}{c}\right)} = a_3 e^{j\omega\left(t - \frac{x_3}{c}\right)}.$$

L'aspect de l'onde réfléchie est donc une onde monochromatique qui ne permet d'avoir aucune information sur la position des cibles (dès lors qu'il y a plus de deux cibles). Ceci est dû principalement à l'hypothèse de linéarité émise pour la réémission des ondes par les cibles élémentaires.

En conclusion, l'illumination de N cibles par une onde monochromatique donne une onde réfléchie monochromatique dont l'amplitude est spécifique à la sommation cohérente, mais dont la phase est inexploitable.

Le chatoiement pleinement développé : un premier modèle

Les milieux dotés d'un grand nombre de diffuseurs ponctuels ont fait l'objet de nombreuses études qui ont permis en particulier de définir la notion de "chatoiement pleinement développé" proposé par Goodman[9]. Pour modéliser de tels milieux, il est nécessaire d'en effectuer une approche statistique et nous allons prendre un cas simplissime pour poser le cadre de cette démarche : celui où les cibles sont toutes identiques et localisées en

$$x_i = p\frac{\lambda}{2} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons vu précédemment que l'illumination par une onde monochromatique ne permet pas de différencier les positions y et $y + q\lambda$ avec $q \in \mathbb{Z}$, ce qui fait que notre modèle se réduit simplement à analyser une population de P cibles en $x_1 = 0$ et Q cibles en $x_2 = \frac{\lambda}{2}$.

Si ce milieu est illuminé par un signal $s(t) = \cos(2\pi ft)$, le signal réémis s'écrit :

$$\begin{aligned} r(t) &= P \cos(2\pi ft) + Q \cos(2\pi ft + \pi) \\ &= (P - Q) \cos(2\pi ft) \\ &= R \cos(2\pi ft) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on retrouve le modèle de la marche aléatoire bien connu du monde de la thermodynamique statistique (voir par exemple [17]) : à chaque pas de temps, un objet se déplace d'une distance donnée unité sur une droite en tirant aléatoirement sa direction de déplacement (à droite ou à gauche). Considérons donc N tirages tels que les valeurs de P et Q correspondent respectivement au nombre de tirage vers la droite et vers la gauche ($P + Q = N$) : on sait alors que la probabilité de se trouver à la distance R de l'origine s'écrit sous la forme d'une loi de Gauss de variance $\sigma^2 = \frac{N}{4}$ (et donc d'écart type $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$) :

$$p(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{2R^2}{N}}. \quad (2.1)$$

On montre aisément que la valeur moyenne est nulle.

La courbe 2.2 a été tracée avec $N = 100$ (l'écart type est alors de 5).

Notons que si l'on considère la valeur absolue de R , on a :

$$p(|R|) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{2R^2}{N}}.$$

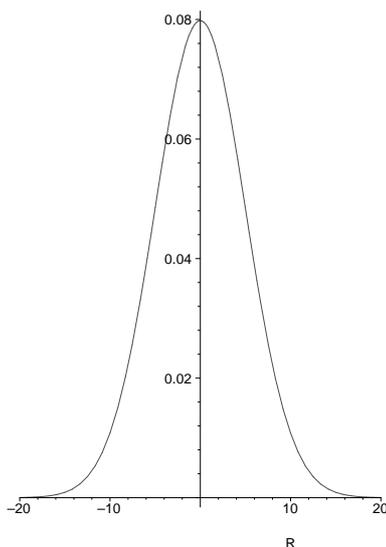


FIG. 2.2 – Marche aléatoire : loi de probabilité de R pour $N = 100$. Entre -20 et 20 (i.e. entre -4σ et 4σ), on observe 99,993% des évènements.

avec $|R| \geq 0$. Dans ce cas, la valeur moyenne est égale à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$.

Considérons maintenant des données en intensité : $I = R^2$. On sait que si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ avec $y = x^2$, si $p(x)$ est la loi de x et $q(y)$ celle de y , on a :

$$q(y) = \frac{p(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \Leftrightarrow p(x) = 2xq(x^2) \quad (2.2)$$

Il est alors aisé de montrer que, pour une variable en amplitude normale centrée en 0, la loi de probabilité en intensité p_I s'exprime en fonction de la loi de probabilité de l'intensité $p_A = p(R)$, avec $y = r^2$:

$$p(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{\sqrt{I}} e^{-\frac{I}{2\sigma^2}} \quad (2.3)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi N}} \frac{1}{\sqrt{I}} e^{-\frac{I}{N}} \quad (2.4)$$

avec $\sigma^2 = \frac{N}{4}$. On montre aisément que la valeur moyenne est $\frac{N}{4}$ et l'écart type $\frac{N}{2\sqrt{2}}$.

La courbe 2.3 a été tracée avec $N = 100$ (ce qui donne une valeur moyenne de 25 et un écart type de 35).

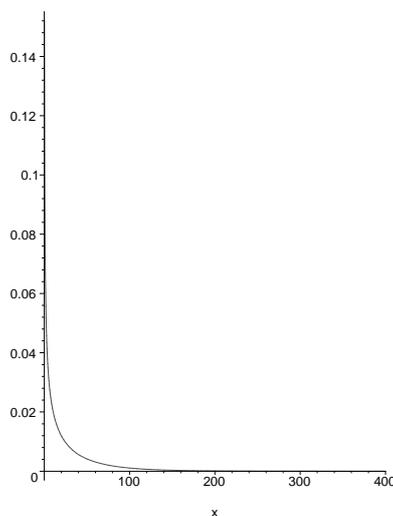


FIG. 2.3 – Loi de probabilité du carré d'une variable R suivant la loi normale tracée figure 2.2 avec $N = 100$. Entre 0 et $400=20^2$, on observe toujours 99,993% des évènements.

Le chatoiement pleinement développé : un second modèle

Pour se rapprocher un peu plus de la réalité, considérons maintenant que les cibles sont positionnées en :

$$x_i = p \frac{\lambda}{4} \quad p \in \mathbb{Z},$$

avec autant de cibles positionnées en 0 et $\frac{\lambda}{2}$ que de cibles positionnées en $\frac{\lambda}{4}$ et $\frac{3\lambda}{4}$.

Le signal reçu s'écrira alors :

$$r(t) = A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft)$$

et on sait que A et B suivent une loi de Gauss de même variance (expression 2.1). Cette expression peut se réécrire :

$$r(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(2\pi ft + \phi)$$

avec $\tan(\phi) = -\frac{B}{A}$.

Pour trouver la loi suivie par l'amplitude de $r(t)$, on peut s'appuyer sur un résultat bien connu des statisticiens qui dit que si A et B sont des variables suivant une loi de Gauss de variance unité, alors $C = A^2 + B^2$ suit la loi du χ^2 à 2 degrés de liberté [10], ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{C}{2}}.$$

Plus précisément, on montre que si A et B suivent une loi de Gauss de même variance σ , alors $C = A^2 + B^2$ suit une loi Gamma :

$$\frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{C}{2\sigma^2}}. \quad (2.5)$$

En prenant $\sigma^2 = \frac{N}{4}$, on obtient :

$$\frac{2}{N} e^{-\frac{2C}{N}}.$$

La courbe 2.4 a été tracée avec $N = 100$.

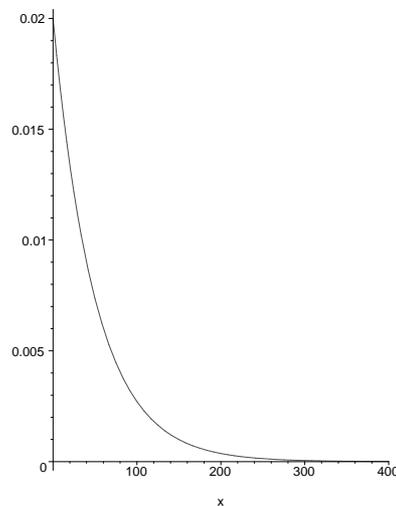


FIG. 2.4 – Loi de probabilité de la somme des carrés de deux variables dont l'amplitude suit la loi normale tracée en 2.2 avec $N = 100$. Entre 0 et 400 ($20^2=400$), on observe 99,97% des événements (la différence est due à des problèmes d'arrondis numériques).

La démonstration s'appuie sur le fait que si l'on somme deux variables aléatoires indépendantes, leurs fonctions caractéristiques (*i.e.* leur transformée de Fourier) se multiplient. Connaissant la fonction caractéristique de la loi en intensité (relation 2.3) :

$$\frac{1}{(1 - jf2\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$$

la somme de deux variables de même variance σ a pour fonction caractéristique :

$$\frac{1}{(1 - jf2\sigma^2)}$$

ce qui donne, par transformation de Fourier inverse, l'expression 2.5 [11].

Si l'on souhaite avoir la loi que suit l'amplitude D ($D^2 = C$), en appliquant la relation 2.2, on obtient la loi de Rayleigh de paramètre $\mu = \sqrt{\frac{N}{2}}$:

$$p_A(D) = \frac{4D}{N} e^{-\frac{2D^2}{N}} = \frac{2}{\mu} \frac{D}{\mu} e^{-\left(\frac{D}{\mu}\right)^2}.$$

Ainsi, sur ce modèle simplifié, on voit naître les principales conclusions propres au chatoiement :

- l'amplitude (ou l'intensité) du signal de rétrodiffusion ne dépend que des cibles en présence : en effet, l'aspect "marche aléatoire" conduit à une loi normale dont la variance ne dépend que de celles-ci.
- la loi suivie par le carré de l'amplitude est une loi Gamma.
- la phase n'est pas a priori porteuse d'information directement exploitable : ceci se généralise dans le cas général (modèle de Goodman). Nous verrons cependant en interférométrie que la différence de phase entre deux images peut être porteuse d'information.

Généralisation et application à l'imagerie

Le modèle présenté, grâce à sa géométrie monodimensionnelle, est simple à traiter et à appréhender. Cependant, il reflète peu la réalité puisque notre monde perceptif est tridimensionnel. Les travaux de Goodman ont cependant permis d'étendre cette approche de cibles quasi ponctuelles rétrodiffusantes à l'espace tridimensionnel et permettent de tirer les conclusions suivantes :

- l'amplitude dépend du nombre et du type de cibles,
- la phase est aléatoire et suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.

D'autre part, la notion de résolution est à la base de tout système d'imagerie : aussi, l'utilisation d'une onde parfaitement monochromatique est antinomique de toute application aux images.

Dans un système optique, ce sont les lois de la diffraction qui permettront de séparer deux objets. On parlera alors de cellule de résolution pour désigner l'espace dans lequel deux objets sont indiscernables. Vis à vis de la longueur des systèmes optiques dans le visible (longueur d'onde de l'ordre de 500 nm), les cellules de résolution, par exemple en télédétection, sont plutôt de l'ordre du mètre : le nombre de diffuseurs élémentaires par cellule de résolution peut être très grand.

Pour un système imageur RSO, la cellule de résolution est définie par deux processus fondamentalement différents : selon l'axe de visée, la résolution s'obtient par mesure du temps de vol, alors que dans la direction transverse (dite azimutale), la résolution se déduit des lois de la diffraction. Pour avoir une bonne résolution axiale, il est nécessaire de sortir du modèle strictement monochromatique : on émet classiquement un signal limité dans le temps et dont la durée donnera la résolution axiale². L'approche du chatoiement que nous avons choisie reste cependant licite à condition que la bande passante du signal émis soit faible vis à vis de la fréquence de la porteuse.

Il faut aussi noter que la PSF (Point Spread Function) liée à tout système imageur n'est jamais parfaitement localisée : aussi l'analyse du chatoiement doit impérativement prendre en compte cette intercorrélacion entre les pixels. Notons que l'analyse de ce phénomène est très difficile à mener correctement : néanmoins ses conséquences sont capitales car il est alors légitime d'interpoler des images complexes dans le cadre de l'interférométrie.

Enfin, sur le plan du signal, on ramène le plus souvent un signal doté d'une porteuse "en bande de base". Pour cela, il suffit de le multiplier d'une part par un cosinus à la fréquence de la porteuse, et d'autre part par un sinus (cosinus en quadrature). On obtient ainsi un signal complexe dont l'amplitude est bien relative à l'amplitude du signal initial, et dont la phase est aléatoire. De manière plus précise, on peut montrer que partie réelle et partie imaginaire suivent une loi gaussienne tandis que la phase est aléatoire.

2.2 Le chatoiement pleinement développé en imagerie RSO [12]

Les images RSO représentent la réponse du terrain à l'onde hyperfréquence émise par le radar, aux atténuations de transmission près. La radiométrie du pixel est donc fonction de l'interaction onde-matière sur la surface imagée correspondante. Elle dépend de deux ensembles de paramètres :

- les paramètres propres au radar (longueur d'onde, bande d'émission $-C, L, X, \dots$ -, polarisation, angle d'incidence, lois d'antenne ...),
- les paramètres liés à la nature du sol (réflectance, humidité, rugosité de la surface par rapport à la longueur d'onde, inclinaison du sol ...) et à la nature des cibles.

²Cette réduction de la durée du signal émis est possible par exemple en échographie. En radar, émettre ce type de signal n'est en revanche pas possible avec les technologies actuelles : aussi, par le biais du filtrage cohérent, on contourne ce problème à condition d'émettre un signal modulé linéairement en fréquence *chirp*.

Le modèle le plus couramment utilisé pour caractériser ce phénomène est toujours celui des points brillants : on considère que le sol est constitué de petits diffuseurs ponctuels dont le nombre est important à l'intérieur de la cellule de résolution, dont la localisation est aléatoire à l'intérieur de chaque cellule de résolution, et dont le coefficient de rétrodiffusion est aussi aléatoire. C'est le formalisme de Goodman [9].

2.2.1 Les lois de chatoiement (sol homogène)

Formalisme des lois

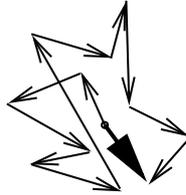


FIG. 2.5 – Dans le plan complexe, le signal reçu par un radar est en fait la somme des échos en provenance d'un grand nombre de diffuseurs.

Le formalisme de Goodman [9] considère donc que la réponse d'une cellule de résolution (zone du sol dont la rétrodiffusion contribue au signal mesuré en un pixel) est la somme de N réponses de cibles ponctuelles aléatoirement réparties dans la cellule. En notant $s_i = \rho_i e^{j\phi_i}$ la réponse de la cible i , la réponse de la cellule est (figure 2.5) :

$$S = \Re(s) + j\Im(s) = \sum_{i=1}^N \rho_i e^{j\phi_i} \quad (2.6)$$

\Re et \Im désignent ici les parties réelles et imaginaires des données, traditionnellement notées i et q (i pour *in phase* et q pour *quadrature*). En effet, le signal traité n'est pas le signal réel (à 5.3 GHz pour ERS par exemple), mais le signal démodulé autour de cette fréquence centrale avec une bande passante de l'ordre de la dizaine de MHz : ce signal est donc un signal complexe.

Soient les hypothèses suivantes :

- ρ_i et ϕ_i sont des variables aléatoires indépendantes,
- les phases ϕ_i sont indépendantes entre elles et suivent une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$
- le nombre N est assez grand ($N \gg 10$).

En utilisant le théorème central limite on peut conclure que les données complexes $S : (\Re, \Im)$ sont des vecteurs centrés gaussiens complexes circulaires[12] :

- la loi de distribution de la partie réelle (i pour *in phase*) s'écrit :

$$P_i(i) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} e^{-\frac{i^2}{R}}$$

- la loi de distribution de la partie imaginaire (q pour *quadrature*) s'écrit :

$$P_q(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} e^{-\frac{q^2}{R}}$$

- les espérances de i et q vérifient :

$$\begin{aligned} E(i) &= E(q) = 0 \\ E(i^2) &= E(q^2) = \frac{R}{2} \Rightarrow E(i^2) + E(q^2) = R \\ E(iq) &= 0 \end{aligned}$$

On montre alors que la densité de probabilité de l'intensité $I = i^2 + q^2$ est une loi Gamma (dite aussi exponentielle décroissante) et s'écrit :

$$P(I) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{I}{\mu_I}} \quad (2.7)$$

Comme précédemment, on peut en déduire la loi de l'amplitude $A = \sqrt{I} = \sqrt{i^2 + q^2}$ (par la relation de changement de variable 2.2) :

$$P_A(A) = \frac{2}{\mu_A} \frac{A}{\mu_A} e^{-\left(\frac{A}{\mu_A}\right)^2}$$

Type	Loi	Max	Statistiques	
			m_1	m_2
Lois en intensité				
I 1-vue	$P(I) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{I}{\mu_I}}$	0	μ_I	$2\mu_I^2$
I L-vues	$P_L(I) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu_I} \left(\frac{LI}{\mu_I}\right)^{L-1} e^{-\frac{LI}{\mu_I}}$	$\frac{L-1}{L} \mu_I$	μ_I	$\frac{L+1}{L} \mu_I^2$
Lois en amplitude (\sqrt{I})				
\sqrt{I} 1-vue	$Q(A) = \frac{2}{\mu_A} \frac{A}{\mu_A} e^{-\left(\frac{A}{\mu_A}\right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \mu_A$	$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \mu_A$	μ_A^2
\sqrt{I} L-vues	$Q_L(A) = \frac{2}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{L}}{\mu_A} \left(\frac{\sqrt{LA}}{\mu_A}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{LA}}{\mu_A}\right)^2}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{2L}} \mu_A$	$\frac{\Gamma(L+0.5)}{\sqrt{L}\Gamma(L)} \mu_A$	μ_A^2

TAB. 2.1 – Lois du chatoiement RSO : lois en amplitude (loi de Rayleigh-Nakagami) et lois en intensité (lois Gamma et Gamma généralisée).

qui est alors la loi de Rayleigh.

Le chatoiement perturbe notablement la lisibilité des images. Aussi, on construit des images “multi-vues” (multilook), dont la résolution plus faible est compensée par un lissage du chatoiement facilitant l’interprétation.

Les images multi-vues sont en général construites à partir des images d’intensité : l’image en intensité “L-vues” est obtenue en moyennant L images en intensité 1-vue décorréelées. Ces L images s’obtiennent en découpant l’ouverture synthétique en L sous-ouvertures : le chatoiement peut être considéré comme décorrélé entre ces sous-images (voir paragraphe 2.3.3). En contrepartie, la résolution se dégrade (multiplication par L).

Si l’on effectue un moyennage multivue d’une image en intensité vérifiant une loi Gamma (équation 2.7) alors l’image multivue suit une loi Gamma généralisée

$$P_L(I) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu_I} \left(\frac{LI}{\mu_I}\right)^{L-1} e^{-\frac{LI}{\mu_I}} \quad (2.8)$$

Le paramètre L , qui est ici par construction le nombre de vue, peut être vu comme un facteur de forme.

Pour construire les images d’amplitude multi-vues, deux techniques sont possibles :

- calculer une image en intensité multi-vue et en prendre la racine carrée : c’est ce que nous appellerons l’image \sqrt{I}
- effectuer la moyenne d’images en amplitude : opération classique en traitement d’image, qui garantit certaines propriétés de linéarité entre autres.

Dans le premier cas (image \sqrt{I}), on peut alors calculer analytiquement les lois de probabilités, puisqu’elles sont connues pour les images “L-vues” en intensité (c’est toujours la relation 2.2 qui est utilisée pour ce calcul) : on obtient alors la loi de Rayleigh-Nakagami :

$$Q_L(A) = \frac{2}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{L}}{\mu_A} \left(\frac{\sqrt{LA}}{\mu_A}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{LA}}{\mu_A}\right)^2}$$

Dans le second cas, la loi de probabilité n’a pas d’expression simple et nécessite éventuellement quelques approximations.

Il est important de noter que ces types de lois (loi de Rayleigh-Nakagami pour les images en amplitude, lois Gamma généralisée pour les images en intensité) ont des caractéristiques bien spécifiques propres aux lois définies sur \mathbb{R}^+ : en particulier, le paramètre μ , la moyenne (moment d’ordre 1) et le mode (valeur correspondant au maximum de la loi) ne sont pas a priori égaux, alors que cette propriété d’égalité est vérifiée par la loi de Gauss.

Ces lois de chatoiement, en amplitude et en intensité, sont illustrées sur la figure 2.6 qui en donne les allures pour différentes valeurs du nombre de vues L . On voit que plus le nombre de vues augmente (*i.e.* plus le facteur de forme L augmente), plus la loi de probabilité est localisée. Le cas $L = \infty$ correspond à une distribution homothétique (un simple gain) que l’on assimile souvent avec une loi normale dégénérée (variance nulle) : il y a donc une relation très forte entre la variance et l’inverse du facteur de forme, qui sera introduite dans le paragraphe suivant par le biais du coefficient de variation γ .

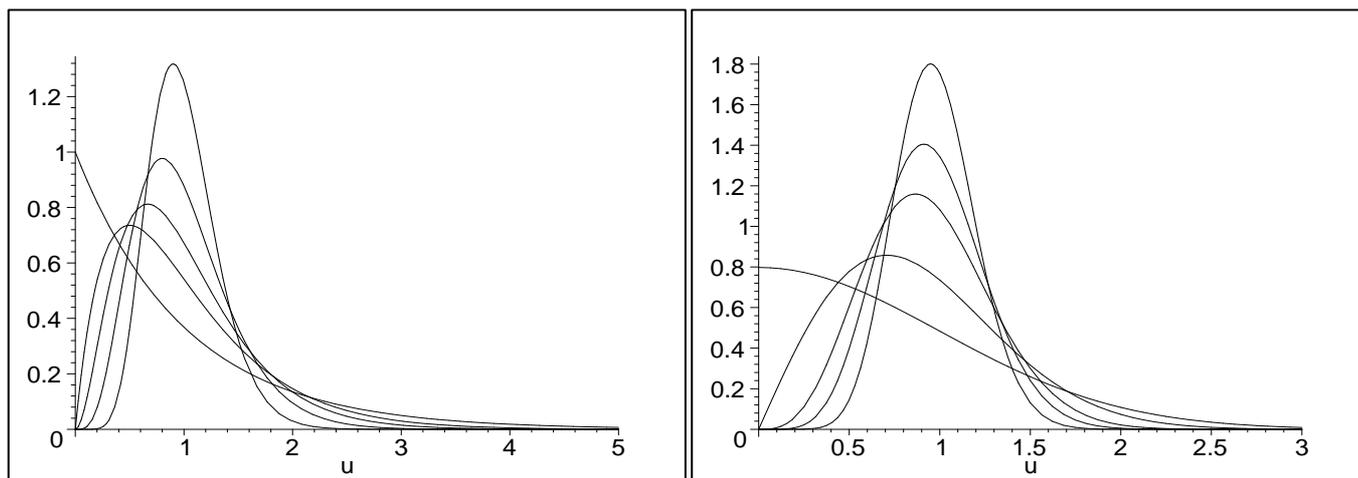


FIG. 2.6 – Les lois du chatolement pleinement développé. A gauche, les lois en intensité : lois Gamma avec $\mu=1$ et $L=1, 2, 3, 5$ et 10 . A droite, les lois en amplitude : lois de Rayleigh-Nakagami avec $\mu=1$ et $L=0,5, 1, 2, 3,$ et 5 . Il faut noter sur cet exemple que la loi Gamma (avec $L=1$) et la loi de Rayleigh-Nakagami (avec $L=0,5$) ont leur mode en 0 .

Statistiques des lois : approche traditionnelle

Les statistiques “traditionnelles” se fondent sur la notion de moments m_i qui, pour une densité de probabilité $p(x)$, s’écrivent :

$$m_i = \int x^i p(x) dx \quad (2.9)$$

On en déduit la notion de moyenne \bar{m} qui est tout simplement le moment d’ordre 1 :

$$\bar{m} = m_1.$$

Les moments centrés $M_i, i > 1$ se déduisent alors des moments par la relation :

$$M_i = \int (x - m_1)^i p(x) dx.$$

Il est facile d’établir une relation entre un moment centré M_i et tous les moments d’ordre $j, j \in [1, i]$. En particulier on montre aisément la relation suivante :

$$M_2 = m_2 - m_1^2.$$

Comme on a $M_2 \geq 0$, on en déduit alors $m_2 \geq m_1^2$.

Dans le cadre de l’imagerie RSO, et plus généralement dans l’analyse de bruit multiplicatif, on utilise souvent le coefficient de variation γ qui s’écrit :

$$\gamma = \sqrt{\frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2}} = \sqrt{\frac{M_2}{m_1^2}}$$

et qui est positif ou nul (puisque $m_2 \geq m_1^2$).

Pour la loi Gamma, on obtient :

$$\gamma = 1$$

et pour la loi de Rayleigh, on a

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})^2} - 1} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \approx 0,52$$

Pour la loi Gamma généralisée et pour la loi de Rayleigh-Nakagami, les moments d’ordre 1 et 2 sont repris tableau 2.1. On en déduit alors le coefficient de variation pour la loi Gamma généralisée :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

mais son expression exacte pour la loi de Nakagami n'a rien d'évident puisque

$$\gamma_{Nakagami} = \sqrt{\frac{\Gamma(L)\Gamma(L+1)}{\Gamma(L+\frac{1}{2})^2} - 1}$$

On peut néanmoins utiliser l'approximation suivante :

$$\gamma_{Nakagami} = \frac{1}{2\sqrt{L}}$$

De même, on peut remarquer que la moyenne est un estimateur non biaisé du paramètre μ pour la loi Gamma, alors que c'est un estimateur biaisé pour la loi de Nakagami.

Log-statistiques des lois : les statistiques de deuxième espèce

Lorsque la variable x est positive (ce qui est notre cas puisque amplitude et intensité sont des valeurs positives), on peut définir un cadre formel original : les logs-statistiques (ou statistiques de Mellin : voir l'annexe C), qui utilise, pour définir la fonction caractéristique, la transformée de Mellin au lieu de la transformée de Fourier : ceci donne alors la fonction caractéristique de deuxième espèce, dont se déduisent les log-moments et les log-cumulants.

On montre alors que les log-moments (ou moments de deuxième espèce) \tilde{m}_i , au lieu d'utiliser les puissances de x comme noyau intégral (formule 2.9), utilisent les puissances de $\log x$:

$$\tilde{m}_i = \int_0^{\infty} (\log x)^i p(x) dx$$

En particulier, on peut remarquer que le premier log-moment peut prendre des valeurs sur \mathbb{R} et qu'il est alors possible d'en prendre l'exponentielle, ce qui donne une valeur réelle positive qui peut se comparer à la moyenne. Aussi on définira la log-moyenne (ou moyenne normalisée) comme l'exponentielle du premier log-moment :

$$\bar{m} = e^{\tilde{m}_1}.$$

De manière analogue aux moments centrés, on peut définir les moments normalisés $\tilde{M}_i, i > 1$

$$\tilde{M}_i = \int_0^{\infty} \left(\log \left(\frac{x}{\tilde{m}_1} \right) \right)^i p(x) dx$$

Les relations entre log-moments et log-moments normalisés sont strictement identiques aux relations entre moments et moments centrés.

On montre alors que pour la loi Gamma, on a :

$$\tilde{m}_1 = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \quad (2.10)$$

$$\tilde{M}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 = \Psi(1, L) \geq 0 \quad (2.11)$$

avec Ψ fonction Digamma (la dérivée logarithmique de la fonction Gamma) et $\Psi(r, L)$ fonction Polygamma, i.e. la dérivée r -ème de la fonction Digamma. On voit que la connaissance du second log-moment normalisé donne implicitement la valeur de L . La Log-moyenne est un estimateur biaisé de μ puisque :

$$\bar{m} = \mu \frac{e^{\Psi(L)}}{L}.$$

Plus intéressant encore, la loi de Nakagami vérifie, à une constante multiplicative près, les mêmes relations (le monde des log-statistiques ne voit pour ainsi dire pas de différences entre amplitude et intensité, qui n'expriment en fait qu'une simple transformation par une loi puissance pour la variable) :

$$\tilde{m}_{1,RN} = \log(\mu_{RN}) + \frac{1}{2} (\Psi(L) - \log(L))$$

$$\tilde{M}_{2,RN} = \tilde{m}_{2,RN} - \tilde{m}_{1,RN}^2 = \frac{\Psi(1, L)}{4} \geq 0$$

Le tableau 2.1 peut alors se réécrire pour les log-statistiques (tableau 2.2).

Type	Loi	Max	Log-statistiques	
			\tilde{m}_1	\tilde{M}_2
Lois en intensité				
I 1-vue	$P(I) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{I}{\mu_I}}$	0	$\log \mu_I + \Psi(1) - \log(1)$	$\Psi(1, 1)$
I L-vues	$P_L(I) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu_I} \left(\frac{LI}{\mu_I}\right)^{L-1} e^{-\frac{LI}{\mu_I}}$	$\frac{L-1}{L} \mu_I$	$\log \mu_I + \Psi(L) - \log(L)$	$\Psi(1, L)$
Lois en amplitude (\sqrt{I})				
\sqrt{I} 1-vue	$Q(A) = \frac{2}{\mu_A} \frac{A}{\mu_A} e^{-\left(\frac{A}{\mu_A}\right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \mu_A$	$\log \mu_A + \frac{\Psi(1) - \log(1)}{2}$	$\frac{\Psi(1,1)}{4}$
\sqrt{I} L-vues	$Q_L(A) = \frac{2}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{L}}{\mu_A} \left(\frac{\sqrt{L}A}{\mu_A}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}A}{\mu_A}\right)^2}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{2L}} \mu_A$	$\log \mu_A + \frac{\Psi(L) - \log(L)}{2}$	$\frac{\Psi(1,L)}{4}$

Tab. 2.2 – Loïs du chatoïement RSO : loïs en amplitude (loi de Rayleigh-Nakagami) et loïs en intensité (loïs Gamma et Gamma généralisée). Premier et second log-moments. Les expressions analytiques des log-moments entre loïs en amplitude et loïs en intensité sont comparables.

Estimation des paramètres : cas des loïs Gamma généralisées

Les données “en intensité” vérifient la loi Gamma généralisée :

$$P(I) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{LI}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{LI}{\mu}}$$

On peut estimer les paramètres par différentes méthodes :

– Méthode du maximum de vraisemblance (MV)

On dispose autour d’un pixel de la connaissance des N valeurs x_i de ses voisins. Maximiser la vraisemblance revient à rechercher les paramètres μ et L maximisant la probabilité

$$\prod_{i=1}^N P(x_i)$$

ou en passant par le logarithme

$$\sum_{i=1}^N \log(P(x_i))$$

En dérivant l’expression par rapport à la variable μ , on obtient l’estimateur $\hat{\mu}$ maximisant la vraisemblance :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{N}$$

On retrouve ainsi l’estimateur du moment d’ordre 1.

En faisant de même avec L , et en prenant pour μ l’estimateur $\hat{\mu}$ précédent, on obtient le système implicite :

$$\log \hat{L} - \Psi(\hat{L}) = \log \hat{\mu} - \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \quad (2.12)$$

que l’on peut très aisément résoudre numériquement.

Ces estimateurs ont une variance minimale (et atteignent les bornes de Cramer Rao).

– Méthode des moments

Il suffit de calculer des estimateurs des deux premiers moments \hat{m}_1 et \hat{m}_2 en calculant les expressions :

$$\hat{m}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}$$

Les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L})$ se déduisent alors par les relations suivantes :

$$\hat{\mu} = \hat{m}_1 \quad (2.13)$$

$$\hat{L} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\hat{m}_2}}{\hat{m}_1}\right)^2 - 1} \quad (2.14)$$

Cependant, la variance de l'estimateur de L a une variance d'autant plus grande que L est petit.

– Méthode des log-moments

On calcule des estimées des log-moments :

$$\hat{m}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)}{N}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\log(x_i))^2}{N}$$

On en déduit alors \hat{L} par la relation implicite :

$$\hat{M}_2 = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2 = \Psi(1, \hat{L})$$

et ensuite la valeur de $\hat{\mu}$ par la relation implicite (relation formellement identique à l'expression 2.12 trouvée pour l'estimateur MV de L) :

$$\log \hat{L} - \Psi(\hat{L}) = \log \hat{\mu} - \hat{m}_1$$

Ces deux relations sont aisées à inverser numériquement. On peut montrer expérimentalement que les estimateurs ainsi trouvés ont une variance proche des bornes de Cramer Rao.

Estimation des paramètres : cas des lois de Rayleigh-Nakagami

Les données "en amplitude" vérifient la loi de Rayleigh-Nakagami :

$$P(A) = \frac{2}{\mu} \frac{L}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}A}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}A}{\mu}\right)^2}$$

Comme dans le cas précédent, on peut estimer les paramètres par différentes méthodes :

– Méthode du maximum de vraisemblance

Pour maximiser la log-vraisemblance

$$\sum_{i=1}^N \log(P(x_i))$$

en dérivant l'expression par rapport à la variable μ , on obtient l'estimateur $\hat{\mu}$ maximisant la vraisemblance :

$$\hat{\mu} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}$$

On peut noter que c'est exactement la même relation que dans le cas de la loi Gamma puisque l'intensité s'obtient en prenant le carré de l'amplitude. En faisant de même avec L , et en prenant pour μ l'estimateur $\hat{\mu}$ précédent, on obtient le système implicite :

$$\log \hat{L} - \Psi(\hat{L}) = 2 \left(\log \hat{\mu} - \frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right)$$

que l'on peut très aisément résoudre numériquement.

– Méthode des moments

Une fois calculés des estimateurs des deux premiers moments \hat{m}_1 et \hat{m}_2 , les estimées $(\hat{\mu}, \hat{L})$ se déduisent alors par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sqrt{\hat{m}_2} \\ \frac{\sqrt{\hat{L}}\Gamma(\hat{L})}{\Gamma(\hat{L} + 0.5)} &= \frac{\sqrt{\hat{m}_2}}{\hat{m}_1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cette dernière expression n'est malheureusement qu'implicite, mais très aisée à inverser numériquement.

– Méthode des log-moments

Une fois calculés les estimées des log-moments d'ordre 1 et 2 : \hat{m}_1 et \hat{m}_2 , on en déduit alors \hat{L} par la relation implicite :

$$\hat{M}_2 = \hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2 = \frac{\Psi(1, \hat{L})}{4}$$

et ensuite la valeur de $\hat{\mu}$ par la relation :

$$\hat{\mu} = e^{(\frac{1}{2}(\log \hat{L} - \Psi(\hat{L})) + \hat{m}_1)}$$

Ces deux relations sont aisées à inverser numériquement. On peut montrer que les estimateurs ainsi trouvés ont une variance proche des bornes de Cramer Rao.

2.2.2 Les lois de chatoiement (sol non-homogène)

Formalisme des lois (images en intensité)

Le calcul mené sur le chatoiement suppose que la zone observée est homogène, tant à l'échelle du pixel qu'à l'échelle de la fenêtre d'analyse. Dans ce cas, la loi de l'image (en intensité) reflète simplement l'existence du chatoiement et est donc une loi Gamma que l'on peut choisir normalisé ($\mu = 1$) :

$$S(x) = \frac{L}{\Gamma(L)} (Lx)^{L-1} e^{-Lx} \quad L \geq 0$$

Si la zone observée n'est pas homogène on doit prendre en compte la texture de la scène sous jacente.

Soit la connaissance d'une part de la loi $G(x|\mu)$ correspondant à une zone homogène (x étant l'amplitude ou l'intensité), et, d'autre part, de la loi $P(\mu)$ correspondant à la probabilité d'avoir une parcelle de paramètre μ . La formule de Bayes permet alors d'écrire la loi suivie par les pixels de l'image :

$$Q(x) = \int_0^{\infty} G(x|\mu)P(\mu)d\mu$$

On peut remarquer que les lois du chatoiement, tant en amplitude qu'en intensité, peuvent s'écrire : $G(x|\mu) = \frac{1}{\mu} S(\frac{x}{\mu})$ où S est une loi de probabilité normalisée (*i.e.* $\mu = 1$). Cette constatation –en fait assez générale car caractéristique d'un “bruit multiplicatif”– permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^{\infty} S\left(\frac{x}{\mu}\right)P(\mu)\frac{d\mu}{\mu} \\ &= (S \hat{\star} P)(x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $\hat{\star}$ représente la convolution de Mellin (appelée aussi “convolution multiplicative”). En notant \mathcal{M} l'opérateur “transformée de Mellin”³, on sait alors que

$$\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(S \hat{\star} P) = \mathcal{M}(S) \mathcal{M}(P).$$

Cette relation permet d'écrire la relation suivante valable pour tout moment m_i (dans la mesure où il existe) :

$$m_{Q,i} = m_{S,i} m_{P,i} \quad (2.17)$$

Ce modèle permet aussi d'écrire directement la loi suivie par les pixels de l'image, connaissant la loi du chatoiement et celle de la texture sous jacente :

$$Q = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{M}(S) \mathcal{M}(P)) \quad (2.18)$$

Expérimentalement, il se trouve que les lois utilisées en imagerie RSO, tant pour modéliser le chatoiement que la texture sous jacente, ont des transformées de Mellin déjà calculées et tabulées. Aussi cette approche permet donc une description analytique du chatoiement en fonction du chatoiement sur zone homogène et de la loi de la texture de la zone étudiée facilement accessible et sans trop de calculs complexes.

Un modèle largement utilisé en imagerie RSO consiste à supposer que la scène sous jacente suit, elle aussi, une loi Gamma de paramètre μ et M :

³On rappelle que la transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$, $x \in [0; \infty]$ est la fonction $\phi(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx$, pour les valeurs de $s \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'intégrale converge

$$P(\mu') = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{M}{\mu} \left(\frac{M\mu'}{\mu} \right)^{M-1} e^{-\frac{M\mu'}{\mu}} \quad M \geq 0$$

Dans ce cas, on montre que la statistique sur l'image RSO (image d'intensité) suit une loi \mathcal{K} :

$$\mathcal{K}[\mu, L, M](I) = \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMI}{\mu} \right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2 \left(\frac{LMI}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.19)$$

avec K la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

On peut aussi utiliser, comme loi pour la scène sous-jacente, la loi Gamma inverse \mathcal{IG} :

$$P(\mu') = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu} \left(\frac{M\mu}{\mu'} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu}{\mu'}} \quad M \geq 0$$

Dans ce cas, on obtient la loi de Fisher (ou loi Beta de deuxième espèce) qui semble expérimentalement bien adaptée au tissu urbain :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](I) = \mathcal{G}[1, L] \hat{\star} \mathcal{IG}[\mu, M] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L}{M\mu} \right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{L}{M\mu} \right)^{(L+M)}} \quad (2.20)$$

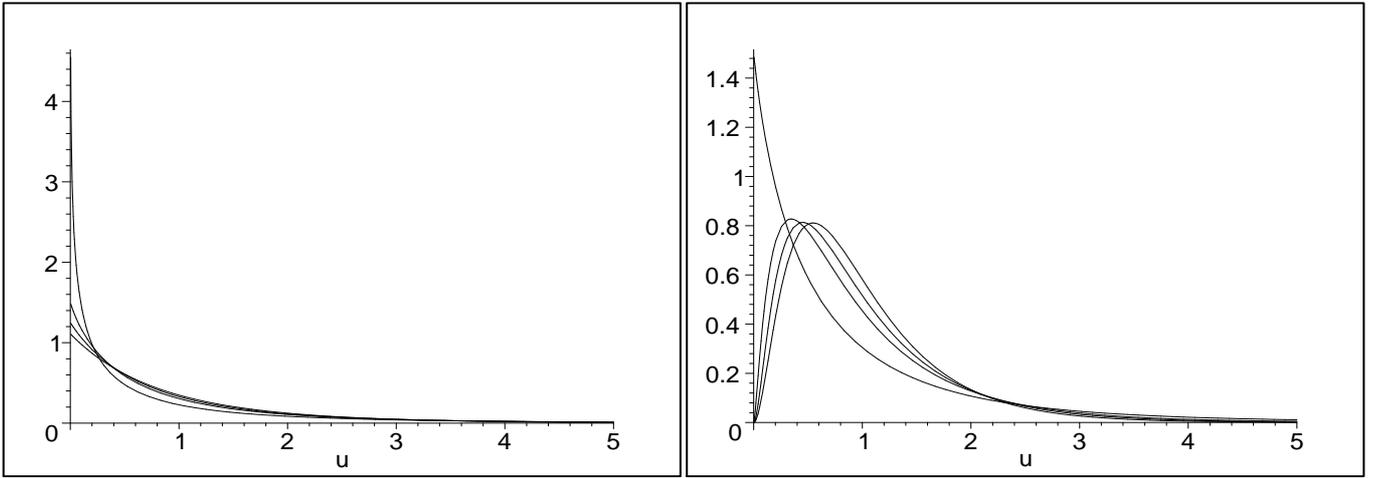


FIG. 2.7 – Loi $\mathcal{K}[\mu, L, M]$ (équation 2.19) : $\mu = 1$ et $L = 1, 3, 5$ et 10 . A gauche $M = 1$. A droite $M = 3$.

D'autres modèles de scènes sous-jacentes conduiront à des lois expérimentalement justifiées (comme les solutions du système de Pearson, ...).

Notons que pour les lois "en amplitude", on aura pour la loi \mathcal{K}

$$\mathcal{K}_A[\mu, L, M](I) = \mathcal{RN}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RN}[\mu, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{4\sqrt{LM}}{\mu} \left(\sqrt{LM} \frac{A}{\mu} \right)^{L+M-1} K_{M-L} \left[\left(2\sqrt{LM} \frac{A}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.21)$$

et pour la loi de Fisher :

$$\mathcal{F}_A[\mu, L, M](A) = \mathcal{RN}[1, L] \hat{\star} \mathcal{RN}\mathcal{I}[\mu, M] = \frac{2}{\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \sqrt{\frac{L}{M}} \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{A}{\mu} \right)^{2L-1}}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{L}{M}} \frac{A}{\mu} \right)^2 \right)^{(L+M)}} \quad (2.22)$$

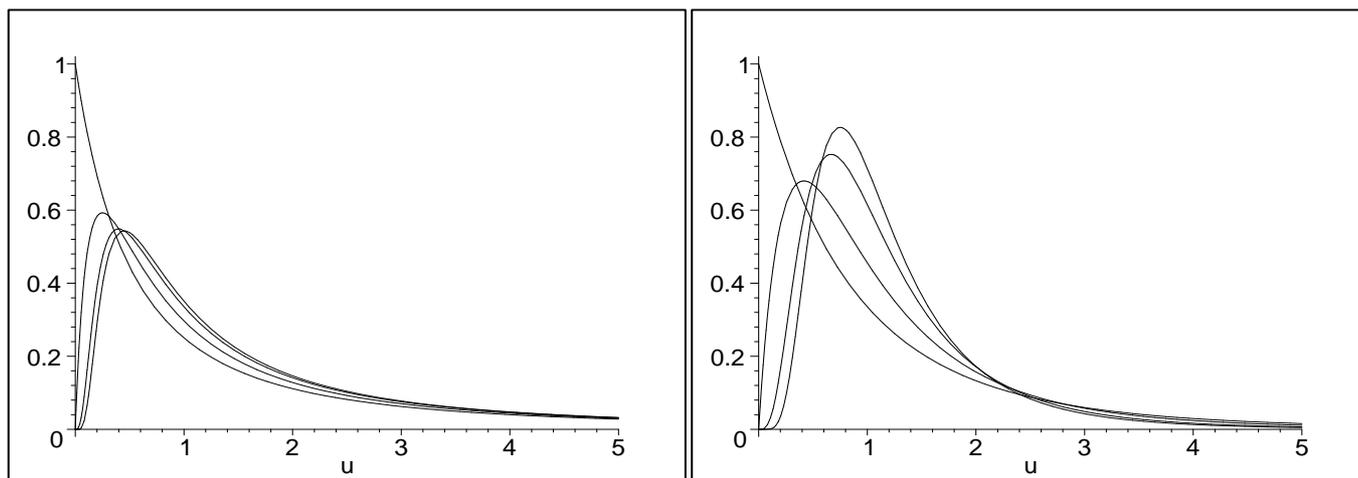


FIG. 2.8 – Loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ (équation 2.20) avec $\mu = 1$, $L = 1, 2, 5, 10$ et $M = 1$ (à gauche) ou $M = 5$ (à droite). L’effet “queue lourde” est plus marqué à gauche ($M = 1$) qu’à droite ($M = 5$).

Estimations des lois (lois à 3 paramètres)

Il est important de noter que la prise en compte d’une loi pour la texture conduit à des lois d’images pouvant avoir au moins 3 paramètres. L’estimation de ces paramètres peut d’ailleurs poser de multiples problèmes : on se cantonnera dans ce texte d’en signaler les difficultés.

- La méthode du maximum de vraisemblance est le plus souvent inapplicable. Par exemple, on démontre que l’on ne peut en pratique l’utiliser pour la loi K ou la loi de Fisher.
- La méthode des moments pose aussi problème. Par exemple, pour la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$, qui est une loi “à queue lourde”, les moments à partir de l’ordre $M + 1$ ne sont pas définis. Aussi utilise-t-on parfois des moments fractionnaires, voire des moments d’indices négatifs (ce qui donne les FLOM “Fractional Low Order Moments”).
- La méthode des log-moments en revanche semble pouvoir s’utiliser dans tous les cas. Seule restriction : le fait que souvent les paramètres ne s’obtiennent que sous une forme implicite.
- Enfin la variance des estimateurs dépend de la dimension de la fenêtre d’analyse et de l’ordre des moments (ou log-moments) utilisés. On montre par exemple que l’on doit monter à l’ordre 3 pour les lois K ou de Fisher : la taille de la fenêtre d’analyse peut alors devoir dépasser largement les 20x20 pixels pour la méthode des moments pour que les estimateurs soient fiables, ce qui donne une estimation insuffisamment localisée. En revanche les log-statistiques permettent, à variance d’estimateur égale, de diminuer notablement la taille des fenêtres.

2.3 Le filtrage des images RSO

Le problème du filtrage du chatoiement a mobilisé une énergie considérable et fait couler beaucoup d’encre, si on se réfère aux nombreux articles qui paraissent tous les ans et depuis une vingtaine d’années sur ce sujet. Il faut dire que l’enjeu est de taille puisqu’un filtre idéal permettant de restaurer parfaitement la scène ramènerait le problème de l’analyse des images radars à celle des images optiques. Le filtrage a donc pour intérêt d’une part d’améliorer la qualité visuelle des images et d’autre part de se ramener éventuellement à des outils développés depuis longtemps pour les images SPOT par exemple. Cependant, il est important de signaler que cette dernière démarche peut s’avérer réductrice : en effet, le chatoiement contient une information qu’il est souvent important de conserver et il ne doit surtout pas être uniquement perçu comme un bruit nuisible à l’interprétation de l’image.

Le moyen le plus simple de filtrage est d’utiliser des techniques de multi-vues, c’est à dire de moyennage de plusieurs pixels. Si on ne dispose que d’une seule image radar, ce moyennage est effectué spatialement et le filtrage se fait au prix d’une perte de résolution proportionnelle au nombre de vues, ce qui en limite l’utilisation. D’autres méthodes ont donc été proposées qui visent à conserver la résolution initiale.

Un filtre idéal doit répondre aux trois objectifs suivants :

- éliminer le chatoiement, donc lisser le plus possible les zones homogènes,
- conserver et rehausser les structures de l’image (lignes, contours, très forts réflecteurs...),
- préserver la texture de la scène.

L'évaluation des performances d'un filtre est en pratique difficile. S'il est possible d'obtenir des critères objectifs pour les deux premières contraintes, comme le nombre de vues équivalent par exemple, en revanche, le dernier point est difficile à évaluer puisque nous ne connaissons pas a priori la texture de la scène.

Au début de l'imagerie RSO, beaucoup de travaux se sont focalisés sur les données PRI (donc en amplitude) : nous verrons donc tout d'abord des filtres non spécifiques aux lois des images, puis des filtres prenant en compte les statistiques de l'imagerie cohérente. Comme il peut être intéressant d'utiliser totalement les données complexes, nous verrons ensuite les filtres utilisant cet aspect "complexe". Enfin, l'utilisation de piles temporelles d'images permet de définir de nouveaux types de filtre : cet aspect est en plein essor de nos jours.

2.3.1 Les filtres non spécifiques aux lois d'image

Les filtres "classiques" (figure 2.9)

Dans cette catégorie sont rangés les filtres qui ne prennent pas en compte les statistiques des images radar. Le plus simple est le filtre moyenne qui consiste à remplacer la valeur d'un pixel par la valeur moyenne de ses pixels voisins. Ce filtre revient à appliquer une technique de multi-vues effectuée spatialement tout en préservant artificiellement la résolution. Le voisinage considéré est généralement une fenêtre carrée donc choisie "à l'aveugle" en chaque pixel. Les zones homogènes sont bien lissées et le phénomène de chatoiement est réduit mais les contours sont rendus flous. Plus la taille de la fenêtre de traitement est grande, plus ces deux aspects s'accroissent.

Une solution permettant de préserver les contours est l'utilisation du filtre médian ; ce filtre donne de bons résultats mais d'une part les zones homogènes sont moins bien lissées et d'autre part les "pixels brillants" pouvant éventuellement représenter des cibles sont alors supprimés..

Un autre filtre ne prenant pas en compte les statistiques du chatoiement est le filtre de Crimmins, essentiellement géométrique, qui travaille sur la surface que constitue la radiométrie de l'image. Les résultats obtenus sont satisfaisants avec des contours bien préservés mais la texture est généralement perdue ainsi que certaines réponses.

Les filtres statistiques

Une seconde catégorie de filtrage consiste à prendre en compte les statistiques en chaque pixel, et à rechercher la valeur maximisant un critère de type a posteriori, qui peut se fonder sur un formalisme bayésien.

Soit un pixel de valeur p et supposons que, sur un voisinage Ω , on ait des estimateurs des paramètres de la loi statistique de l'image, et en particulier la valeur μ liée au coefficient de rétrodiffusion. On recherche donc une valeur \hat{p} qui représente un estimateur de la valeur réelle de la rétrodiffusion en ce pixel.

La règle de Bayes nous permet d'écrire la relation :

$$P_{\text{a posteriori}}(\hat{p}|p) = \frac{P(p|\hat{p}) P(\hat{p})}{P(p)} \sim P(p|\hat{p}) P(\hat{p})$$

Pour pouvoir appliquer cette formule, il suffirait de connaître :

- la probabilité a priori $P(\hat{p})$ (texture sous jacente),
- la loi de probabilité conditionnelle $P(p|\hat{p})$ (effets du chatoiement).

Si l'on ne peut faire aucune hypothèse sur la texture sous jacente, la relation de Bayes s'écrit alors :

$$P_{\text{a posteriori}}(\hat{p}|p) \sim P(p|\hat{p}) \quad (2.23)$$

Le filtre MAP (maximum a posteriori) se ramène alors à un maximum de vraisemblance et revient à trouver la valeur \hat{p} maximisant la loi conditionnelle $P(p|\hat{p})$ qui est estimée dans un voisinage Ω du pixel considéré. Puisque l'on est en présence d'un chatoiement pleinement développé, on a :

$$P(p|\hat{p}) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\hat{p}} \left(\frac{Lp}{\hat{p}} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lp}{\hat{p}}}$$

En prenant la dérivée logarithmique partielle selon la variable \hat{p} de cette expression, et si l'on restreint le voisinage Ω au seul pixel considéré, il vient⁴ :

$$\frac{L(p - \hat{p})}{\hat{p}^2} = 0 \Leftrightarrow \hat{p} = p$$

⁴Pour une image en amplitude, donc suivant une loi de Nakagami, le calcul donne $\frac{L(p^2 - \hat{p}^2)}{\hat{p}^3} = 0$ et conduit au même résultat, ce qui est satisfaisant pour l'esprit : un changement de variable ne doit pas modifier la vraisemblance du résultat.

Maximiser la vraisemblance revient simplement à conserver la valeur du pixel !!

Considérons maintenant un voisinage du pixel dans lequel on connaît les N valeurs des pixels $p_1 \dots p_N$. On suppose que ces valeurs sont des échantillons indépendants. Alors la probabilité de tirer ces N valeurs s'écrit :

$$P(p_1, \dots, p_N | \hat{p}) = \prod_{i=1}^N P(p_i | \hat{p}).$$

En prenant la dérivée logarithmique de cette expression, on obtient :

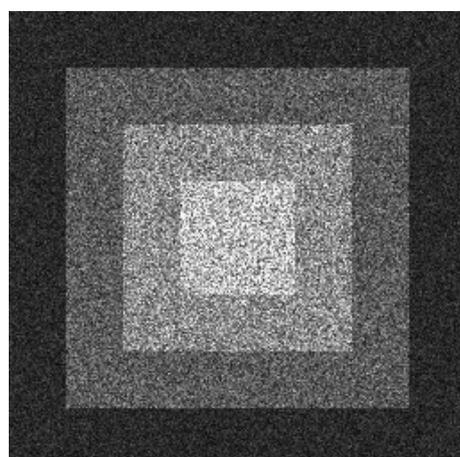
$$\sum_{i=1}^N \frac{L(p_i - \hat{p})}{\hat{p}^2} = 0$$

et en considérant la moyenne \bar{p} , on obtient alors

$$\hat{p} = \bar{p},$$

ce qui revient à prendre l'estimateur MV.

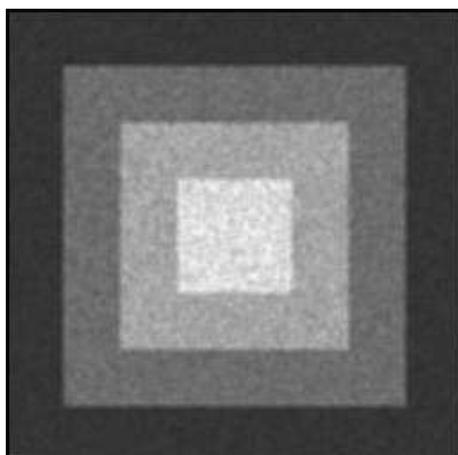
Nous verrons que cette approche s'avèrera d'autant plus constructive qu'il est possible d'établir des hypothèses sur $P(\hat{p})$: c'est ce qui fait l'objet du prochain paragraphe.



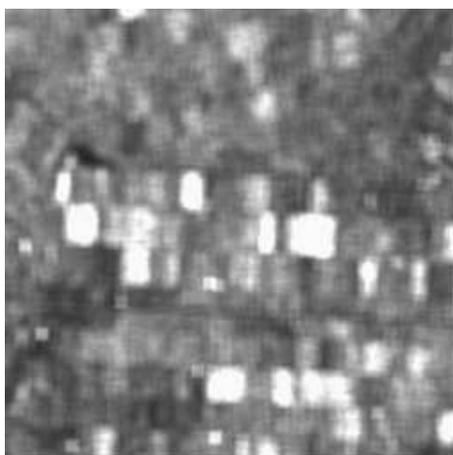
a. Mire originale



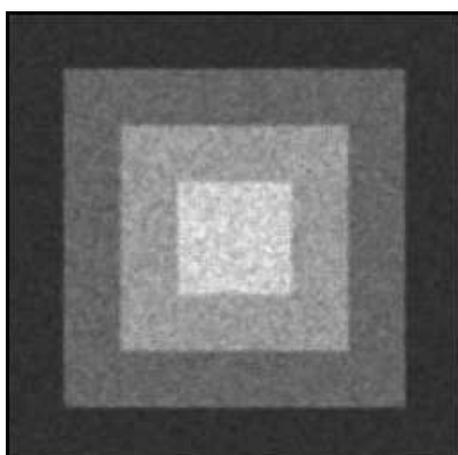
b. Image de Lelystad originale ©ESA



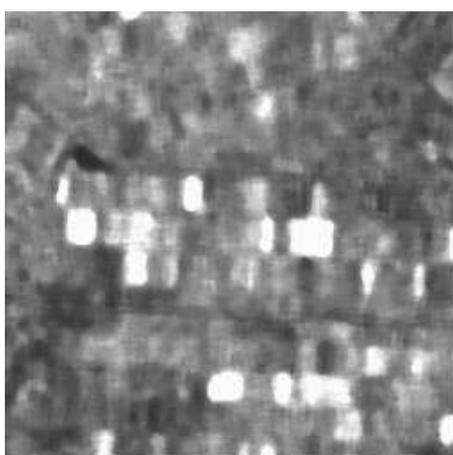
c. Filtre moyenne



d. Filtre moyenne



e. Filtre median



f. Filtre median

FIG. 2.9 – Application de filtres classiques (moyenne et median) avec une fenêtre 7×7 sur une mire synthétique et sur une image ERS PRI des Pays Bas

2.3.2 Les filtres avec hypothèses sur l'image

Les filtres statistiques

Soit un chatoiement pleinement développé normalisé vérifiant la loi Gamma

$$P(p|\hat{p}) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\hat{p}} \left(\frac{Lp}{\hat{p}}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lp}{\hat{p}}}$$

Partant de l'expression bayésienne 2.23, on fait maintenant l'hypothèse que la texture sous jacente suit elle aussi une loi Gamma :

$$P(\hat{p}) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{M}{\mu} \left(\frac{M\hat{p}}{\mu}\right)^{M-1} e^{-\frac{M\hat{p}}{\mu}}$$

et on a vu que la loi de l'image suit alors une loi K (formule 2.19), dont on peut estimer les paramètres sur un voisinage Ω . En prenant la dérivée logarithmique partielle selon la variable \hat{p} de cette expression, il vient :

$$\frac{\mu(M-1) - M\hat{p}}{\mu \hat{p}}$$

La log vraisemblance sera maximale si :

$$\left(\frac{L(p - \hat{p})}{\hat{p}^2} + \frac{\mu(M-1) - M\hat{p}}{\mu \hat{p}}\right) = 0$$

Le système à résoudre est alors un polynôme du second degré dont on ne conserve que la solution positive, ce qui donne :

$$\hat{p} = \frac{1}{2M} \left(\mu(M-L-1) + \sqrt{\mu} \sqrt{\mu(M-L-1)^2 + 4MLp} \right)$$

On a ainsi trouvé l'expression du filtre Gamma-MAP pour les données en intensité.

Pour les données en amplitude, les calculs sont un petit peu plus lourds et conduisent à l'expression suivante

$$\hat{p}_A = \sqrt{\frac{1}{2M} \left(\mu^2(2M-2L-1) + \mu \sqrt{\mu^2(2M-2L-1)^2 + 16MLp^2} \right)}$$

Il est tout à fait possible d'effectuer d'autres hypothèses sur les lois de texture sous jacente. En particulier, l'utilisation de la loi Gamma inverse peut être proposée pour permettre de prendre en compte certains effets spécifiques "à queue lourde" que l'on peut rencontrer dans le tissu urbain par exemple. Nous avons vu que la loi ainsi obtenue est une distribution de Fisher (formule 2.20), dont la forme dépend de 2 paramètres : L lié au chatoiement, et M caractérisant les effets de "queue lourde". Le filtre "Fisher-MAP" ainsi obtenu s'écrit :

$$\hat{p} = \frac{Lp + M\mu}{1 + L + M}$$

Il se trouve être aussi un filtre adaptatif puisque l'on obtient ainsi une expression linéaire (somme pondérée) entre la vraie valeur du pixel (p) et la moyenne locale (μ).

Pour les données en amplitude, on a

$$\hat{p}_A = \sqrt{\frac{2Lp^2 + 2M\mu^2}{1 + 2L + 2M}}$$

Filtres adaptatifs de Kuan et de Lee

Analysant une image RSO comme le résultat d'une convolution de Mellin entre une loi $S(u)$ décrivant le chatoiement normalisé (une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_S, L_S]_{\mu_S=1}$ dans le cas d'une image en intensité), et une loi décrivant la texture sous jacente P :

$$Q(u) = S(u) \star P(u) = \mathcal{G}[\mu_S, L_S]_{\mu_S=1}(u) \star P(u) \quad (2.24)$$

il apparaît donc que la valeur d'un pixel q est le résultat d'un mélange multiplicatif de la valeur de la texture sous jacente p et des effets du chatoiement. Le but du filtrage est de proposer une estimée \hat{p} de la valeur de la texture à partir de la valeur mesurée du pixel de l'image q , de la connaissance locale de la loi décrivant l'image Q , et de la loi du chatoiement S , supposée connue.

Parmi les lois possibles, il est d'usage d'imposer la linéarité (on parlera aussi de développement au premier ordre) ainsi que l'absence de biais ($E(\hat{p}) = E(p)$), ce qui conduit à définir une relation ne dépendant que d'un seul paramètre k :

$$\hat{p} = (1 - k)\bar{p} + k\frac{q}{\mu_S} \quad (2.25)$$

\bar{p} , la moyenne, étant estimée sur un voisinage du pixel considéré, et μ_S étant la valeur moyenne du chatoiement (ici $\mu_S = 1$, puisque notre chatoiement a été choisi normalisé). Reste à définir le paramètre k , qui dépend a priori du voisinage du pixel considéré.

Parmi les critères possibles permettant de définir k , le plus naturel est de minimiser l'erreur quadratique moyenne (filtre EQMM) : cette approche a été menée par Kuan sous une forme sans approximation, et antérieurement par Lee avec une légère approximation. A partir des équations 2.24 et 2.25, il est aisé de calculer l'erreur quadratique moyenne \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= E\{(\hat{p} - p)^2\} \\ &= E\left\{\left((1 - k)\bar{p} + k\frac{q}{\mu_S} - p\right)^2\right\} \\ &= E\left\{\left(\bar{p} - p + k\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)\right)^2\right\} \\ &= E\left\{\left(\bar{p} - p + k\left(\frac{q - \bar{q}}{\mu_S}\right)\right)^2\right\} \end{aligned}$$

et d'en exprimer sa dérivée par rapport à la variable k : cette expression doit être nulle pour minimiser \mathcal{E} . On peut alors écrire :

$$E\left\{\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)\left(\bar{p} - p + k\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)\right)\right\} = 0$$

ce qui permet d'obtenir, puisque les lois du chatoiement et de la texture sous jacente sont indépendantes, l'expression suivante pour k :

$$k = \frac{E\left\{\left(\frac{q}{\mu_S} - \bar{p}\right)(p - \bar{p})\right\}}{E\left\{\left(\frac{q - \bar{q}}{\mu_S}\right)^2\right\}} = \frac{E\{p^2\} - E\{p\}^2}{E\{q^2\} - E\{q\}^2} \mu_S^2.$$

En utilisant les moments centrés d'ordre 2 de la texture $M_{P,2}$ et de l'image globale $M_{Q,2}$, on obtient finalement l'expression suivante :

$$k = \frac{M_{P,2}}{M_{Q,2}} m_{S,1}^2. \quad (2.26)$$

Le moment centré d'ordre 2, $M_{P,2}$, qui, lié à la texture sous jacente, ne peut donc être estimé directement, s'exprime néanmoins en fonction de la connaissance du chatoiement et de l'image. Pour cela, à partir de la relation 2.24 et de la propriété 2.17, on écrit

$$M_{P,2} = m_{P,2} - m_{P,1}^2 = \frac{m_{Q,2}}{m_{S,2}} - \frac{m_{Q,1}^2}{m_{S,1}^2}$$

et, utilisant les coefficients de variation $\gamma_S = \sqrt{\frac{m_{S,2}}{m_{S,1}^2} - 1}$ et $\gamma_Q = \sqrt{\frac{m_{Q,2}}{m_{Q,1}^2} - 1}$, on obtient finalement la relation suivante :

$$M_{P,2} = \frac{m_{Q,1}^2}{\mu_S^2} \frac{\gamma_Q^2 - \gamma_S^2}{1 + \gamma_S^2} = \frac{M_{Q,2}}{\mu_S^2} \frac{1 - \frac{\gamma_S^2}{\gamma_Q^2}}{1 + \gamma_S^2}$$

relation qui permet d'établir la formule due à Kuan :

$$k_{Kuan} = \frac{1 - \frac{\gamma_S^2}{\gamma_Q^2}}{1 + \gamma_S^2} \quad (2.27)$$

dans laquelle γ_S est déduit des connaissances a priori sur la nature du chatoiement et γ_Q est estimé localement sur l'image. Remarquons toutefois que si les expressions 2.26 et 2.27 sont assez limpides, le passage de la première à la seconde s'est avéré plutôt laborieuse.

La formule de Lee est une approximation de cette relation :

$$k_{Lee} = 1 - \frac{\gamma_S^2}{\gamma_Q^2} \quad (2.28)$$

Ce qui donne pour les images en intensité (loi Gamma) :

$$k_{Lee} = 1 - \frac{L_Q}{L_S} \quad (2.29)$$

Dans le cas des images en amplitude (loi de Rayleigh Nakagami) la relation 2.28 ne permet curieusement aucune simplification parlante.

Les comportements de ces deux filtres, très utilisés en imagerie radar, sont proches. Sur une zone très homogène, on a $\gamma_Q \approx \gamma_S$, et donc $k = 0$, ce qui implique $\hat{p} = \bar{p}$. La valeur du filtre sur une zone homogène est simplement la moyenne locale. En revanche, sur une zone très hétérogène (à proximité d'une discontinuité par exemple), on a $\gamma_Q \gg \gamma_S$, donc $k = 1$ pour le filtre de Lee (et $\frac{1}{1+\gamma_S^2}$ pour le filtre de Kuan). L'action de moyennage est interrompue ou limitée sur ce genre de zones où la meilleure estimation de la réflectivité est la radiométrie même du pixel.

Les filtres adaptatifs (échelle logarithmique)

Dans le cas de lois définies sur \mathbb{R}^+ , on peut tout à fait remplacer la notion d'erreur quadratique par l'Erreur Quadratique Normalisée (EQN) qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{E}} = E \left\{ \left(\log \left(\frac{x}{y} \right) \right)^2 \right\}. \quad (2.30)$$

Considérons maintenant que la loi de l'image RSO est une convolution de Mellin de la loi du chatoiement et de la loi de la scène. Posons que l'estimateur de la valeur du pixel \hat{p} vérifie une expression de type homomorphique (identique à la précédente par passage en échelle logarithmique) :

$$\hat{p} = \bar{p}^{1-k} \left(\frac{q}{\bar{m}_S} \right)^k, \quad (2.31)$$

expression dans laquelle on a aussi remplacé les moyennes par les log-moyennes : \bar{p} est la log-moyenne calculée dans un voisinage donné du pixel considéré et \bar{m}_S est la log-moyenne du chatoiement (rappelons que cette log-moyenne, dans le cas d'un chatoiement de type Goodman, *i.e.* suivant une loi Gamma normalisée, dépend de μ et de L).

Développons l'EQN :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= E \left\{ \left(\log \left(\frac{\hat{p}}{p} \right) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left((1-k) \log \bar{p} + k \log \left(\frac{q}{\bar{m}_S} \right) - \log p \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left((\log \bar{p} - \log p) + k (\log q - \log \bar{p} - \log \bar{m}_S) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left((\log \bar{p} - \log p) + k (\log q - \log \bar{q}) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left(\log \frac{\bar{p}}{p} + k \log \frac{q}{\bar{q}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Pour minimiser $\tilde{\mathcal{E}}$, il suffit de rechercher la valeur de k qui en annule la dérivée première. On peut donc écrire

$$E \left\{ \log \frac{q}{\bar{q}} \left(\log \frac{\bar{p}}{p} + k \log \frac{q}{\bar{q}} \right) \right\} = 0$$

ce qui permet, puisque les lois du chatoiement et de la texture sous jacente sont indépendantes, d'obtenir l'expression suivante pour k :

$$k = \frac{E \left\{ \log \frac{\bar{p}}{p} \log \frac{q}{\bar{q}} \right\}}{E \left\{ \left(\log \frac{q}{\bar{q}} \right)^2 \right\}} = \frac{E \left\{ \left(\log \frac{\bar{p}}{p} \right)^2 \right\}}{E \left\{ \left(\log \frac{q}{\bar{q}} \right)^2 \right\}}.$$

A partir de la définition des log-moments normalisés, on en déduit l'expression suivante

$$k = \frac{\tilde{M}_{P,2}}{\tilde{M}_{Q,2}}. \quad (2.32)$$

Pour obtenir $\tilde{M}_{P,2}$, il suffit d'utiliser les propriétés des moments normalisés :

$$\tilde{M}_{P,2} = \tilde{M}_{Q,2} - \tilde{M}_{S,2}$$

ce qui donne directement

$$k = 1 - \frac{\tilde{M}_{S,2}}{\tilde{M}_{Q,2}}, \quad (2.33)$$

que l'on peut rapprocher du filtre de Lee classique (ratio des coefficients de variations, équation 2.28). Remarquons la simplicité des calculs nécessaires à l'obtention de cette relation, à la différence du cas classique qui avait nécessité quelques artifices (utilisation laborieuse du coefficient de variation) pour arriver au formalisme de Kuan.

Menons maintenant la même analyse que pour les filtres de Lee et Kuan.

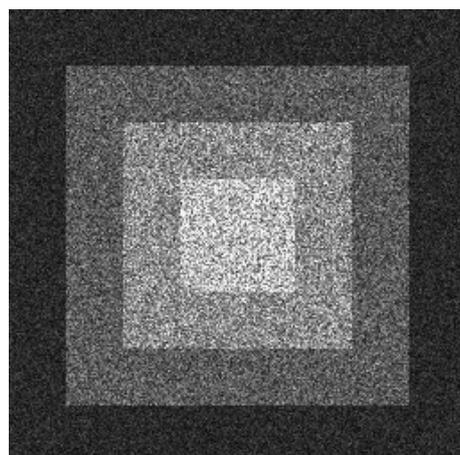
- Dans une zone homogène, on aura $k = 0$. On attribuera alors comme valeur au pixel la *log-moyenne*, qui, dans le cas de la loi Gamma, est légèrement inférieure à la valeur moyenne.
- Dans une zone totalement hétérogène, on aura $k = 1$. On prendra alors comme estimée la valeur effective du pixel.

On voit que le comportement est fondamentalement différent de celui du filtre de Kuan puisque, pour les zones homogènes, on ne retient pas la moyenne, mais une valeur s'en approchant (la log-moyenne, qui est un estimateur biaisé du paramètre μ), et pour les zones très hétérogènes (correspondant en général à la présence de pixels brillants), on prend la vraie valeur du pixel, sans pondération. La dynamique globale est donc supérieure à celle obtenue par les techniques linéaires.

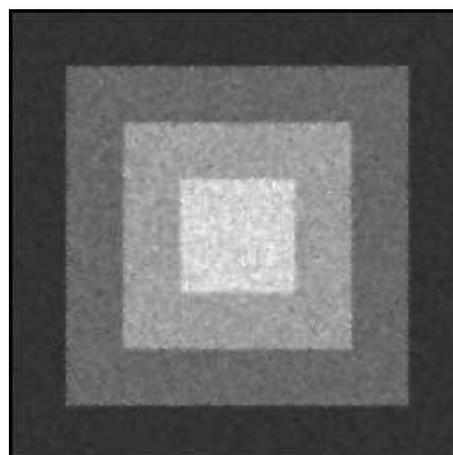
Remarquons enfin que, tant pour la loi Gamma généralisée que pour la loi de Nakagami, la relation 2.33 s'exprime :

$$k = 1 - \frac{\Psi(2, L_S)}{\Psi(2, L_Q)}$$

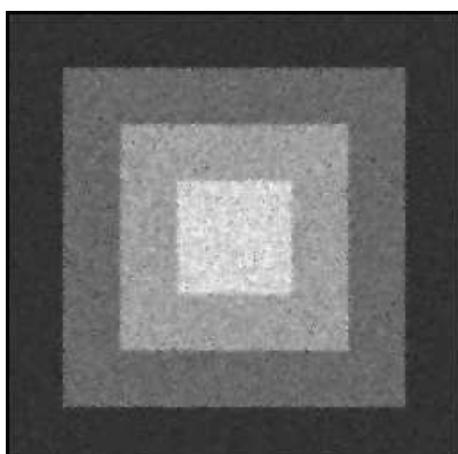
qui présente de fortes similitudes avec 2.29, expression valide seulement pour la loi Gamma généralisée (en se rappelant que les fonctions $\Psi(2, x)$ sont décroissantes, ce qui explique pourquoi les indices sont permutés entre numérateur et dénominateur).



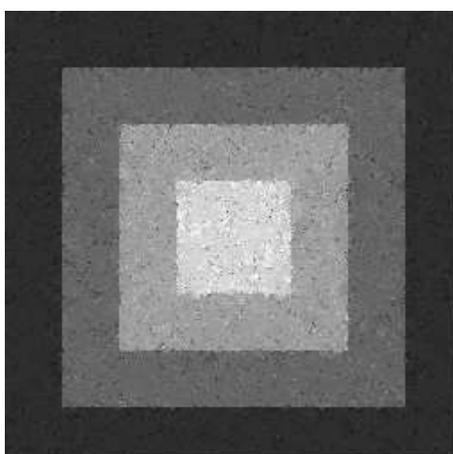
a. Image synthétique originale



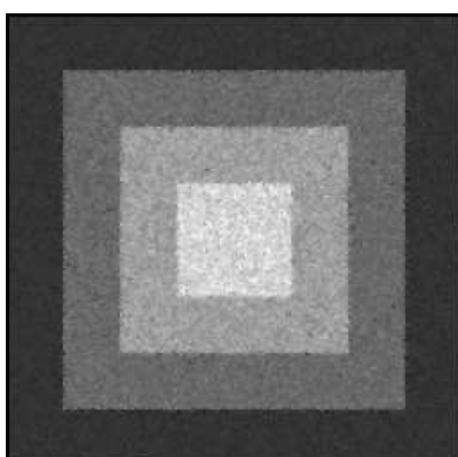
b. Filtre de Lee



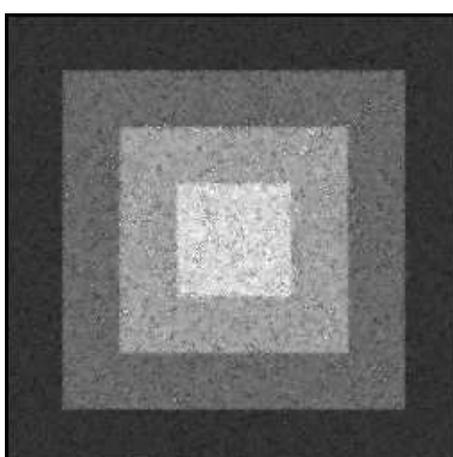
c. Filtre homomorphe (EQN)



d. Filtre de Wu et Maître modifié combiné au filtre EQN.



e. Filtre Gamma MAP

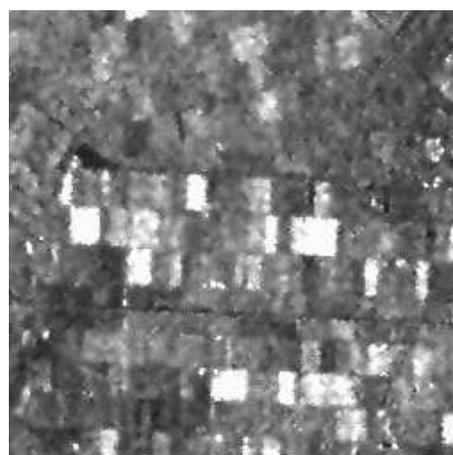


f. Filtre Fisher MAP

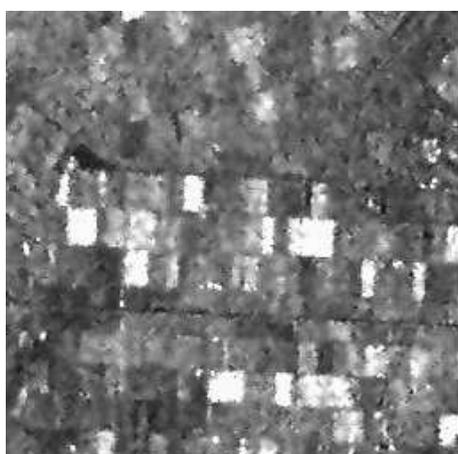
FIG. 2.10 – Application de quelques filtres sur une mire synthétique (a) correspondant à un chatoiement pleinement développé, image 3-vues ($L = 3$), d'amplitudes moyennes variables (6500, 13000, 19500, 26000). Lorsqu'une fenêtre de traitement est utilisée, elle est de taille 7×7 . Pour les filtres de Lee (b), EQN (c) et Gamma MAP (e), on a pris $L=3$. Aucune hypothèse n'est à prendre pour le filtre Fisher MAP (d) et Wu et Maître modifié (f).



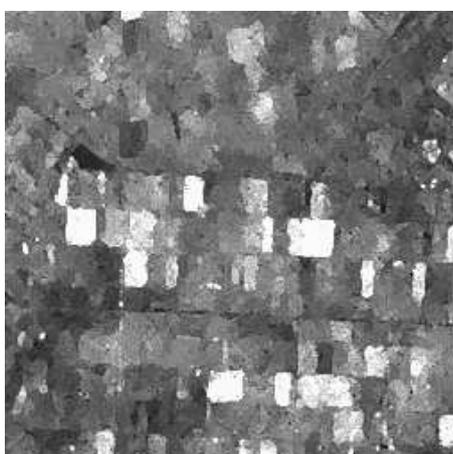
a. Image synthétique originale ©ESA



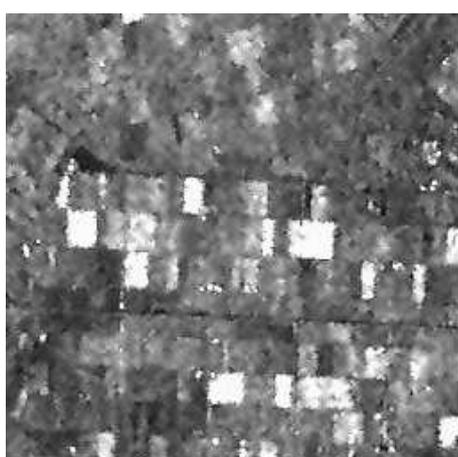
b. Filtre de Lee



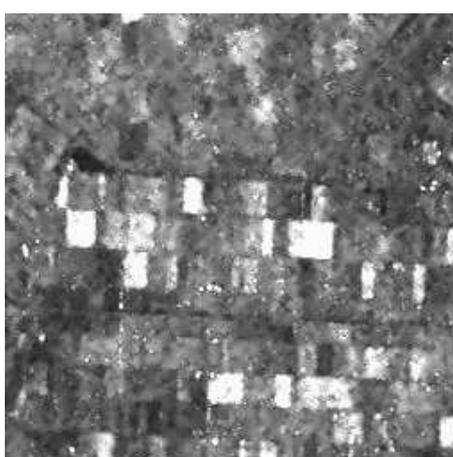
c. Filtre homomorphe (EQN)



d. Filtre de Wu et Maître modifié combiné au filtre EQN.



e. Filtre Gamma MAP



f. Filtre Fisher MAP

FIG. 2.11 – Application de quelques filtres sur une image ERS 3-vues (a) prise sur la ville de Lelystad (Pays Bas). Lorsqu'une fenêtre de traitement est utilisée, elle est de taille 5×5 . Pour les filtres de Lee (b), EQN (c) et Gamma MAP (e), on a pris $L=3$. Aucune hypothèse n'est à prendre pour le filtre Fisher MAP (d) et Wu et Maître modifié (f).

L'amélioration du calcul des statistiques

La taille et la forme de la fenêtre de calcul des statistiques sont des paramètres primordiaux pour tous les filtres précédents. Celles-ci doivent répondre à deux contraintes antagonistes : d'une part, il faut que le calcul s'effectue sur des pixels appartenant à la même région physique que le pixel considéré ; d'autre part, il faut que le nombre de pixels utilisés pour ce calcul soit le plus grand possible. En effet, plusieurs études ont montré que le nombre de pixels nécessaires à une évaluation fiable des statistiques d'une région est très élevé (de l'ordre de 300 pixels pour le coefficient de variation calculé par la méthode des moments). Ces tailles sont en pratique prohibitives et entraînent la prise en compte de pixels d'autres régions si les fenêtres sont de forme carrée.

Lee et Kuan préconisent l'utilisation de détecteurs de contours pour vérifier localement l'homogénéité d'une fenêtre de traitement. Mais cela permet seulement de répondre à la première contrainte.

En revanche, Wu et Maître ont proposé une solution permettant de prendre en compte les deux aspects du problème. Elle consiste à rechercher en un pixel la plus grande fenêtre homogène à laquelle appartient ce pixel. La méthode proposée est une technique de croissance de régions, au départ de forme carrée. La variation de l'écart-type $\Delta\sigma$ au cours de la croissance permet de distinguer quatre cas :

- si l'écart-type diminue significativement (par rapport à un seuil), le pixel est un réflecteur spéculaire et la croissance est arrêtée ; les statistiques sont calculées sur la fenêtre initiale ;
- si l'écart-type augmente significativement, alors le pixel est proche d'un contour ; la position du contour est détectée et la croissance a lieu dans la direction opposée au contour ; elle s'arrête lorsque toute croissance augmente l'écart-type et les statistiques sont calculées sur la plus grande fenêtre obtenue ;
- si $\Delta\sigma$ n'est pas particulièrement élevé mais que l'écart-type initial l'est, le pixel est sur un contour ; le déroulement des opérations est le même que précédemment ;
- si $\Delta\sigma$ est faible et que l'écart-type initial l'est également, le pixel appartient à une zone homogène ; la fenêtre est agrandie jusqu'à ce que plus aucune croissance ne soit possible ou jusqu'à ce qu'une taille limite soit atteinte.

Dans tous les cas, le calcul des statistiques se fait sur la plus grande fenêtre possible autour du pixel. Le filtrage à proprement parler est ensuite réalisé par un filtre de Kuan, mais d'autres filtres peuvent tout aussi bien être utilisés.

Le paramètre choisi pour tester l'homogénéité des zones n'est cependant pas bien adapté aux images radar. En effet, comme il a déjà été mentionné, l'écart-type d'une région augmente avec sa radiométrie. Par conséquent, les tailles de fenêtres maximales obtenues sur des régions homogènes sombres et brillantes seront différentes. Le filtrage dépendra donc de la radiométrie des régions. Une manière de contourner ce problème est de remplacer l'écart-type par le coefficient de variation, ce qui apporte une amélioration significative. On peut enfin ne considérer que le facteur de forme L par le biais des log-statistiques puisque $L = \Psi^{-1}(\tilde{M}_2)$. Néanmoins, les résultats obtenus dépendent fortement des fenêtres sur lesquelles sont calculées les statistiques : en effet, le filtre utilisé a peu d'influence puisqu'on se ramène souvent à une zone homogène, cas dans lequel la majorité des filtres sont équivalents à un moyennage.

Une autre manière de résoudre le problème est de choisir de grandes tailles de fenêtres (11x11 par exemple), mais de coupler au filtrage des détections de contours, de lignes et de réflecteurs spéculaires pour les préserver. C'est l'approche adoptée par Lopes qui utilise un filtre Gamma-MAP et effectue parallèlement ces détections.

Un bilan comparatif de ces filtres est donné sur une image synthétique (figure 2.10). Au passage, il est important de noter ce point essentiel aux images RSO : la nécessité de travailler sur les images 16 bits lorsqu'elles sont disponibles. En effet, les statistiques et, surtout, le coefficient de variation peuvent être perturbés lors du passage en 8 bits.

2.3.3 Le filtrage de données dans \mathbb{C}

Le filtrage en sous bandes

Dans la mesure où l'on dispose des images complexes (SLC : Single Look Complex), une famille de filtres spécifiques peut alors être utilisée : ce sont les filtres en sous-bandes.

Le principe en est très simple : après transformée de Fourier, le spectre d'une image SLC à valeurs complexes n'est en rien localisé autour de la fréquence nulle, comme le serait une image traditionnelle (dont les pixels sont décrits par des valeurs positives ou nulles). Ce spectre reflète en fait les caractéristiques intrinsèques de la synthèse RSO : le long de la fauchée, on sait que le signal temporel est une rampe en fréquence, et, selon la trace (en azimut), on peut identifier la fréquence spatiale f_y avec la fréquence Doppler. Si l'on effectue alors un filtrage passe bande autour de la fréquence azimutale f_y , cela revient alors à effectuer un filtrage passe-bande autour de la fréquence Doppler $F_D(t)$ et donc à ne considérer que la sous ouverture synthétique de l'antenne correspondant aux positions auxquelles on peut attribuer une fréquence Doppler $F_D(t)$.

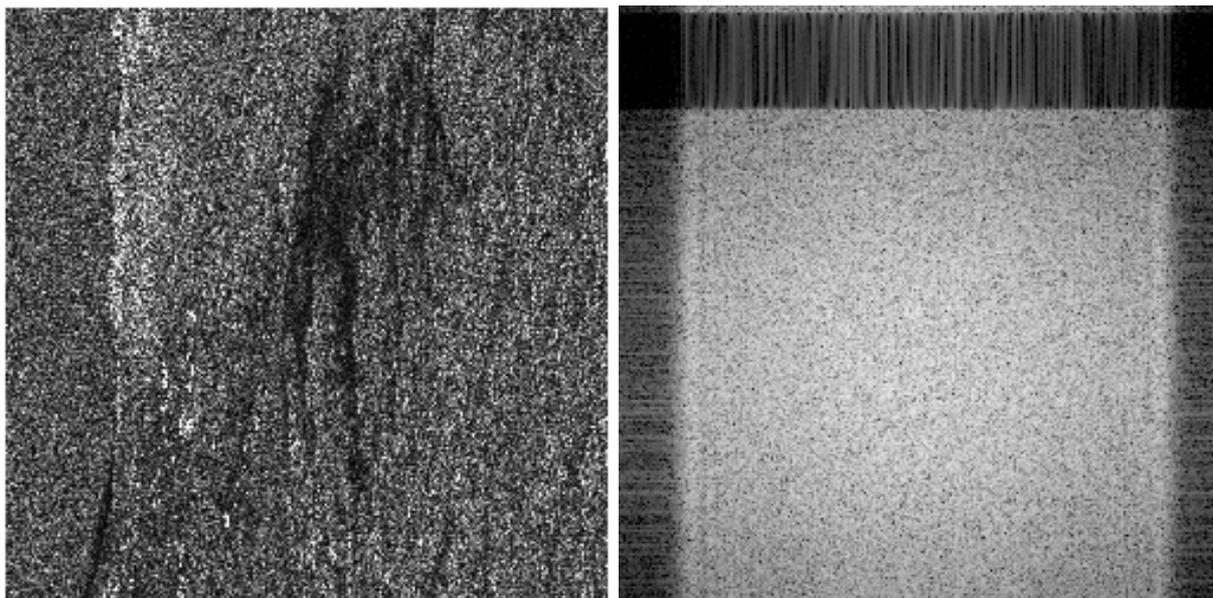


FIG. 2.12 – Amplitude d’une image complexe (SLC) ERS de la Guyane ©ESA (à gauche). A droite, module de sa transformée de Fourier brute : on observe un léger décentrage du spectre dû à un léger dépointage de l’antenne vis à vis de la trajectoire du satellite.

La figure 2.12 montre une image SLC de la Guyane (©ESA) et le module de sa transformée de Fourier. On constate donc que, contrairement à une image “standard”, le spectre n’est pas localisé autour de la fréquence nulle. De plus, on constate qu’il y a un léger décentrage du spectre car les hypothèses de pointage de l’antenne n’ont pas été parfaitement vérifiées : la valeur de décalage de ce dépointage se trouve dans la littérature sous l’appellation “Doppler centroid”.

Puisqu’effectuer un filtrage en sous-bande revient à utiliser une sous-ouverture de l’antenne synthétique, n’importe quelle portion du spectre contient de l’information permettant de reconstruire, avec une résolution dégradée, la totalité de la scène : la figure 2.13 illustre ce concept.

Dans la mesure où un objet est effectivement visible dans toutes les sous ouvertures, il sera reconstruit de la même manière par reconstruction en sous-bande : ce sera le cas de la majorité des objets visibles sur une image RSO (constructions, routes, objets géographiques comme les fleuves, les traits de côte, ...). En revanche, si la visibilité d’un objet dépend de l’angle de prise de vue, chaque sous bande apportera une information complémentaire. Dans le cas des capteurs satellitaires, même si la différence d’angle de vue est faible (de l’ordre du centième de radian), le chatoiement sera quand même perçu de manière différente selon les sous-ouvertures, donc dans les sous-bandes : on effectue ainsi des réalisations non corrélées correspondant à la même loi du chatoiement, et en effectuant une sommation incohérente se traduit donc par un lissage du chatoiement au détriment de la résolution qui se dégrade d’un facteur identique.

La figure 2.14 illustre le principe du filtrage en sous-bandes : le spectre est découpé en 4 sous-bandes distinctes, et la fusion s’effectue par simple moyenne des images d’amplitude (d’autres combinaisons peuvent s’avérer tout aussi légitimes).

Les filtres hermitiens

Un cas particulier de filtrage en sous bande est le filtre hermitien : à partir de deux sous bandes indépendantes (qui permettent de construire les images A et B), on construit la nouvelle image Z telle que la valeur du pixel z s’écrive :

$$z = a b^*$$

On montre que si l’image initiale peut se modéliser par du chatoiement pleinement développé (et donc par une loi Gamma) la loi suivie par cette nouvelle image est une loi \mathcal{K} .

Comme dans le cas du filtrage multivue, on peut remplacer la valeur de chaque pixel par la moyenne calculée sur un voisinage \mathcal{V} du pixel considéré :

$$z = \sum_{i \in \mathcal{V}} a_i b_i^*$$

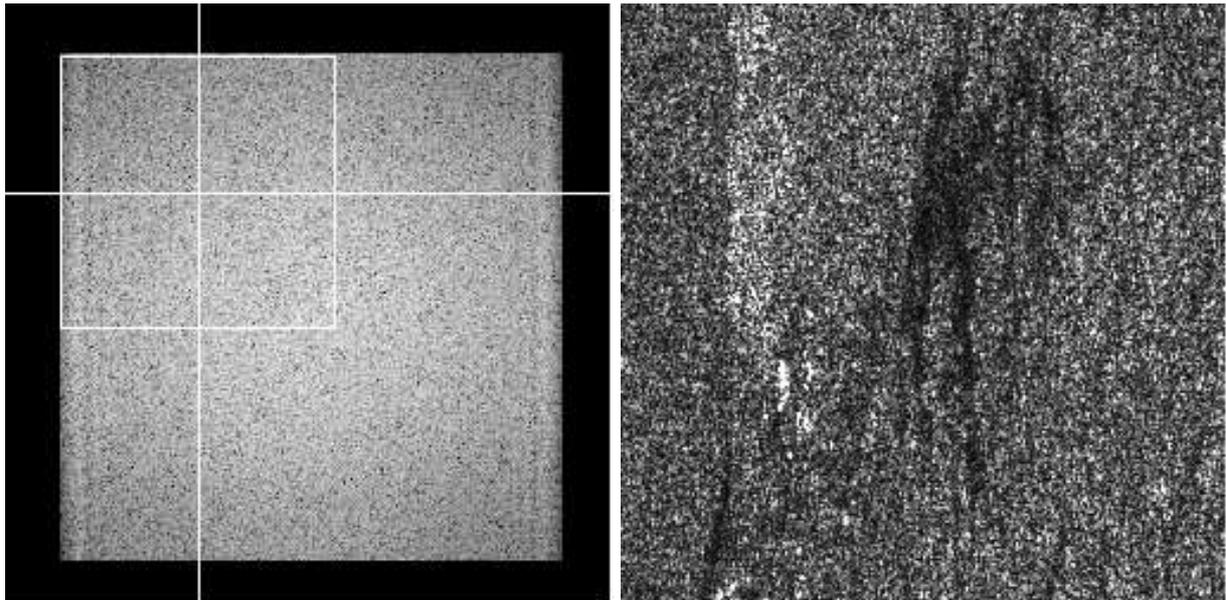


Fig. 2.13 – Image complexe (SLC) ERS de la Guyane ©ESA. A gauche, la fenêtre d’analyse sur la transformée de Fourier brute. A droite, on a calculé sa transformée de Fourier inverse en plaçant des 0 (*zero-padding*) sur les points en dehors de la fenêtre considérée.

Une variante consiste alors à normaliser ce produit hermitien :

$$z = \frac{\sum_{i \in \mathcal{V}} a_i b_i^*}{\sqrt{\sum_{i \in \mathcal{V}} a_i a_i^*} \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{V}} b_i b_i^*}}$$

C’est cette grandeur qui est utilisé en interférométrie.

Le filtrage de points brillants

Signalons enfin qu’il est possible de masquer de manière adaptative les effets de la PSF (double sinus cardinal). Pour cela, on peut appliquer la méthode SVA (Spatial Variant Apodisation) décrite en annexe B.

On peut aussi citer la méthode CLEAN (et ses variantes comme CLEAN-Relax) qui consiste à soustraire points brillants après points brillants la PSF idéale dont on calcule l’amplitude par un principe de minimisation.

2.3.4 Le filtrage multi-temporel

Les techniques de filtrage présentées travaillent sur une unique image radar : une autre optique consiste à utiliser plusieurs images d’une même région et à les fusionner. L’information disponible est dans ce cas bien supérieure à celle fournie par une image radar seule, et cette approche est généralement nommée filtrage multi-temporel car les images utilisées sont acquises à des dates différentes.

En pratique, c’est la technique la plus prometteuse quant au filtrage, mais également la plus coûteuse. En effet, elle utilise les différentes images comme des vues incohérentes et applique une méthode de multi-vues. Les images sont généralement obtenues à des dates différentes et une simple opération de moyennage n’est parfois pas adaptée aux variations temporelles qui interviennent.

Le point difficile est de disposer d’une pile d’images parfaitement recalées (ce recalage doit être opéré sur les données complexes et doit aussi prendre en compte la trajectographie fine des acquisitions). Plusieurs techniques facilement accessibles peuvent être envisagées :

- Une simple moyenne temporelle pixel par pixel. Cette technique suppose que les données sont comparables en terme de rétrodiffusion (citons comme source de problème le changement de niveau moyen sur les données ERS courant 1992).
- une ACP suivie de la projection des données sur la valeur principale la plus grande. Cette méthode permet de s’affranchir du problème de niveau moyen variable.
- un filtre de type Lee en prenant comme voisinage du pixel ses voisins temporels (selon l’axe du temps). Si le nombre d’individus de la plie est insuffisant, on peut aussi rajouter les 4 voisins quinconces (qui sont fortement décorrélés du pixel central puisque la PSF est alors un produit de sinus cardinaux : les effets d’un

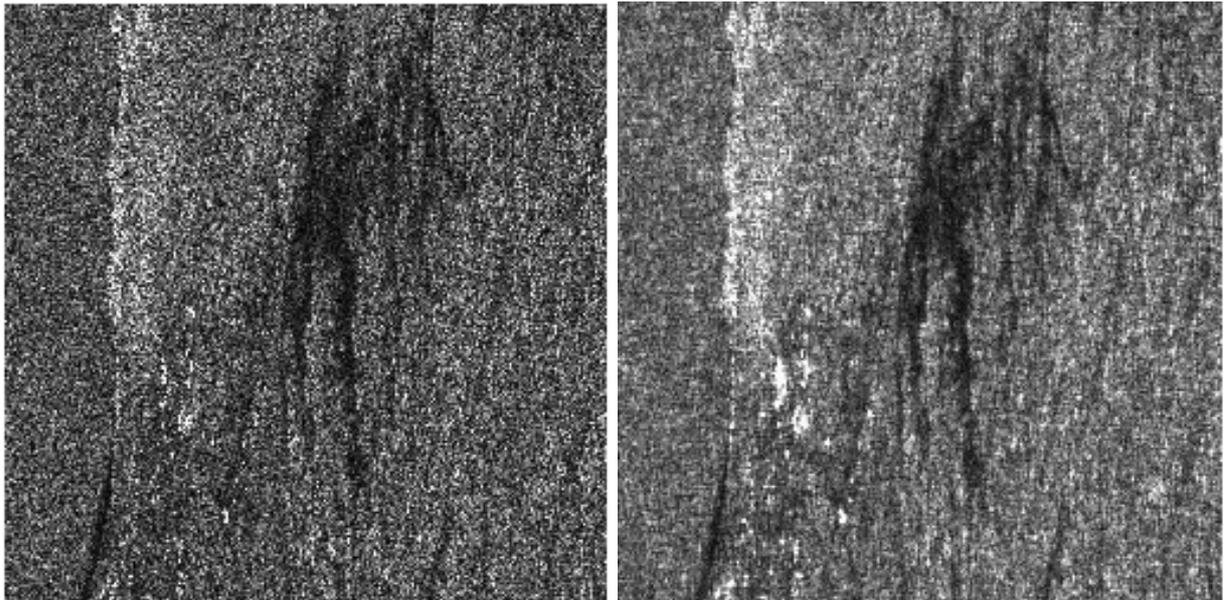


FIG. 2.14 – Image complexe (SLC) ERS de la Guyane ©ESA. A gauche, l'image en amplitude. A droite, filtrage en sous bande "moyenne" (image 4-vues).

secondaire à -13dB correspondent alors à -26dB) pour le pixel étudié et ses voisins temporels : on multiplie alors par 5 la taille du voisinage. Il est intéressant de noter que l'on a autant d'images filtrées que d'images dans la pile.

– Avec le même voisinage quinconce, on peut effectuer un filtre de type Fisher-MAP.

Les résultats sont spectaculaires comme on peut l'observer sur la figure 2.15 où le traitement utilisé est donc le premier cas (une ACP suivi d'une projection sur le pseudocanal contenant le plus d'informations).

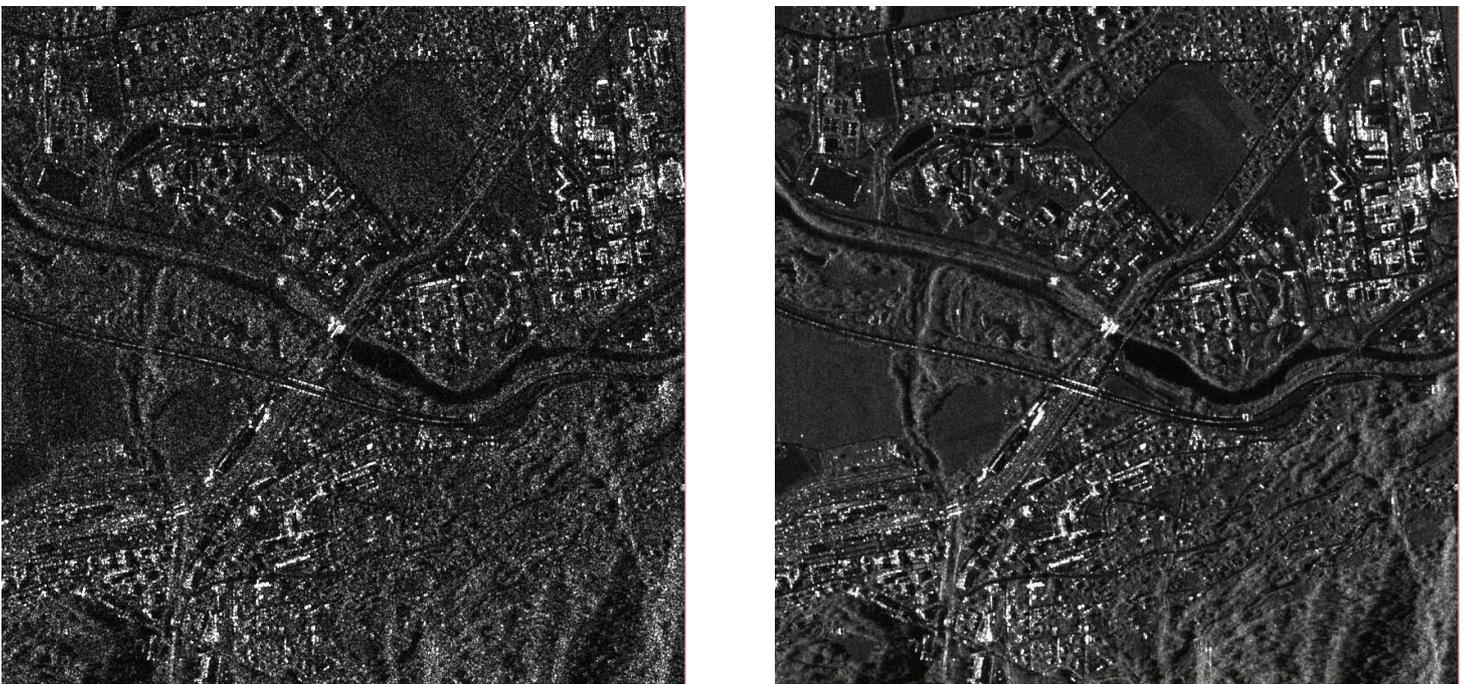


FIG. 2.15 – Exemple de traitement multitemporel sur des données Terrasar-X acquises sur la zone industrielle de Saint Gervais les Bains (74). A gauche, une des 13 images disponibles (©DLR). A droite, la projection sur le vecteur propre correspondant à la valeur propre la plus élevée lors d'une ACP.

Chapitre 3

L'interférométrie RSO



3.1 Introduction

Le principe de l'interférométrie : étudier les interférences entre deux sources cohérentes, est bien connu dans de nombreux domaines. Dès lors que l'on dispose de deux sources cohérentes, il est possible d'analyser les combinaisons des deux ondes ainsi générées : puisque les sources sont cohérentes, les ondes se combinent en prenant en compte à la fois phase et amplitude, alors que dans le cas de l'imagerie incohérente on ne fait qu'additionner les amplitudes (*i.e.* les énergies).

Les premières expériences d'interférométrie remontent aux débuts de l'optique cohérente, c'est à dire au début du XIX^{ème} siècle : les longueurs d'ondes sont submicroniques, et étant donnée la valeur de la vitesse de la lumière, les expériences les plus marquantes ont été celles des franges d'Young pour lesquelles il suffit de percer deux trous dans un écran à une distance de l'ordre du millimètre pour observer sur un écran positionné à une distance métrique des franges d'interférence.

Le passage à des ondes de type radiofréquences ne pose aucun problème, si ce n'est un dimensionnement différent puisque les longueurs d'onde sont alors centimétrique (caz des systèmes radars imageurs actuels). Il est à noter que l'on peut tout à fait se placer dans d'autres contextes de type propagatifs pour effectuer l'analyse d'interférogramme, comme en acoustique sous marine par exemple.

Cependant, une grande question expérimentale se pose, en particulier pour les systèmes spatiaux : comment disposer de deux sources cohérentes en orbite pour en étudier les interférogrammes ? Si Terrasar-X se verra doté d'un clone (à l'horizon 2010, dans le cadre de la mission tandem), la communauté scientifique n'a pas attendu pour autant cette échéance pour effectuer des interférogrammes, dès les premières acquisition de SIR-B dans les années 80. En effet, en utilisant une des caractéristiques des vols en orbite : une certaine stabilité des orbites due à la quasi-sphéricité de la Terre et aux lois de Kepler, il est possible de refaire passer un satellite sur une orbite très proche d'une précédente orbite. Grâce à ce subterfuge, il est alors possible d'analyser les deux jeux de données pour construire a posteriori un interférogramme synthétique qui reflète au mieux ce que l'on aurait pu obtenir avec deux sources simultanées.

Ainsi présenté, il semble que le problème soit simple : il n'en est rien ! D'une part le passage d'un satellite sur une orbite proche de la précédente n'est jamais aisé et nécessite un excellent pilotage du satellite. D'autre part, cette revisite du site (sous des conditions d'acquisition identiques : en particulier même incidence locale) ne peut se faire généralement que dans un délai relativement élevé : 11 jours pour Terrasar-X et de l'ordre du mois pour les autres satellites RSO (25 jours pour Radarsat, 35 jours pour ERS, 44 jours pour JERS, 46 jours pour ALOS)¹. Or, entre temps, il peut se produire de profondes modifications de la zone étudiée changeant totalement le coefficient de rétrodiffusion et remettant en cause les possibilités de construire des interférogrammes.

Ce chapitre propose tout d'abord une formalisation de l'interférométrie radar adaptée au contexte spatial, puis une étude du chatoiement et des lois suivies par des données sur 2 canaux. Enfin, une analyse de l'utilisation de l'interférométrie pour la topographie sera illustrée sur différents cas de figures.

3.2 Formalisation de l'interférométrie [1]

L'interférométrie est donc un principe bien connu des praticiens des ondes cohérentes. En particulier, les opticiens ont, bien avant les radaristes, exploré cette piste scientifique. Aussi leur formalisme est présenté ici en guise d'introduction à l'interférométrie Radar, qui présente certaines particularités dues à la construction de l'image RSO.

3.2.1 Formalisation de l'interférométrie "optique" (en géométrie "sol")

On considère un plan de repère (Oxz) lié au sol que l'on pourra considérer comme plan (on néglige la rotondité de la Terre).

La paire d'images interférométriques est acquise selon deux prises de vues :

- le satellite maître **B** , en $\begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix}$ *i.e.* altitude H , angle d'incidence θ
- le satellite esclave **A** , en $\begin{pmatrix} B_x \\ H + B_z \end{pmatrix}$ *i.e.* situé à une distance $\begin{pmatrix} B_x \\ B_z \end{pmatrix}$ du satellite B.
- On considère deux points au sol : $P = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $\tan \theta = \frac{X}{H}$ et $Q = \begin{pmatrix} X + x \\ z \end{pmatrix}$.

¹ Il faudra attendre la constellation complète CSK pour envisager des revisites à 4 jours. Notons aussi que, en données d'archive, on a une revisite d'1 jour lors des acquisitions tandem ERS1-ERS2.

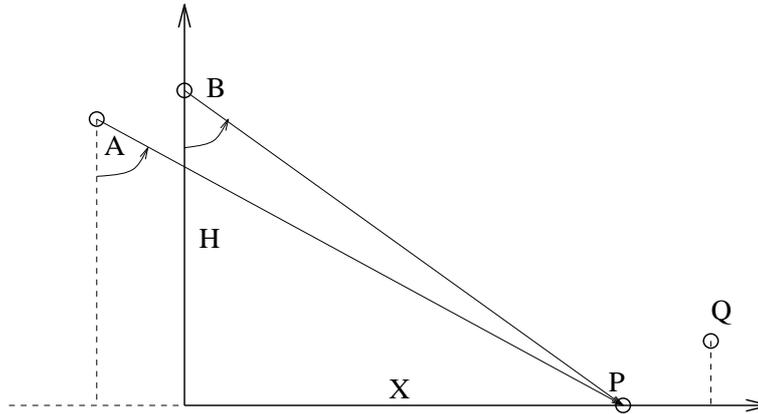


FIG. 3.1 – Repère interférométrique, hypothèse de terre plate.

L'interférométrie consiste donc à analyser la différence de marche entre les parcours BPA et BQA et à comparer cette valeur avec la longueur d'onde :

$$\delta R = (d(PA) - d(PB)) - (d(QA) - d(QB))$$

Pour calculer la différence de parcours, on sait que :

$$\begin{aligned} d(PB) &= \sqrt{X^2 + H^2} \\ d(PA) &= \sqrt{(X + B_x)^2 + (H + B_z)^2} \\ d(QB) &= \sqrt{(X + x)^2 + (H - z)^2} \\ d(QA) &= \sqrt{(X + x - B_x)^2 + (H + B_z - z)^2} \end{aligned}$$

On obtient la relation (développement au second ordre)

$$\delta R = \frac{B_x \cos \theta + B_z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}} (x \cos \theta + z \sin \theta) \quad (3.1)$$

En définissant la grandeur B_{orth} par

$$B_{orth} = B_x \cos \theta + B_z \sin \theta$$

qui est en fait la composante orthogonale de la base par rapport à la direction de la visée, on peut alors écrire :

$$\delta R = \frac{B_{orth} (x \cos \theta + z \sin \theta)}{\sqrt{X^2 + H^2}} \quad (3.2)$$

La figure 3.2 explicite les deux composantes de B_{orth} :

- $B_x \cos \theta$ correspond à la distance $A'D$
- $B_z \sin \theta$ correspond à la distance BD

On voit donc sur cette figure que la base orthogonale correspond à une position privilégiée du satellite esclave telle que la droite liant les deux satellites soit perpendiculaire à l'angle de visée. Toute position du satellite esclave perpendiculairement à cette base orthogonale donnera le même régime d'interférences.

Le membre de droite de l'expression 3.1 comporte deux termes :

- $\frac{x \cos \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}}$: ce terme ne dépend que des positions des deux satellites et de la position du point visé en faisant l'hypothèse d'un sol plat. Il est à l'origine des **franges orbitales** ou franges de terrain plat, phénomène qui peut être apparenté à une fonction d'appareil.
- $\frac{z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}}$: ce terme, qui dépend de l'altitude du point visé, est à l'origine des **franges topographiques**.

Si l'on se place sur une droite passant par P et perpendiculaire à la direction de visée, on peut remarquer que l'expression $D_{orth} = x \cos \theta + z \sin \theta$ est elle aussi une distance orthogonale : la figure 3.3 permet de s'en convaincre rapidement par un raisonnement analogue au précédent. De ce fait, si Q appartient à la droite décrite par l'équation $x \cos \theta + z \sin \theta = cste$ et qui est perpendiculaire à cette distance orthogonale, le régime des franges en ce point est alors inchangé.

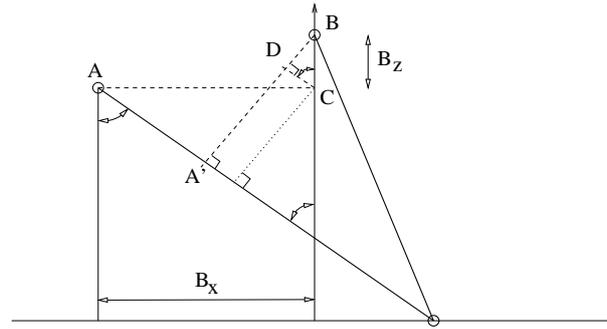
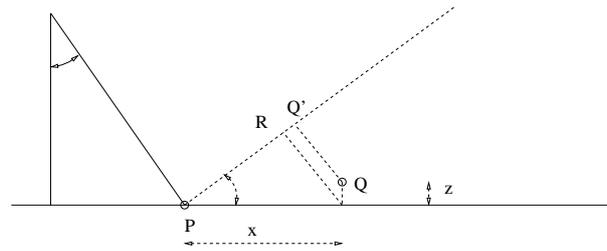


FIG. 3.2 – Repère interférométrique : calcul de la base orthogonale.

FIG. 3.3 – Composante orthogonale correspondant aux positions des cibles P et Q

Pour finir, notons la symétrie intrinsèque de l'expression 3.1 qui montre que le problème peut s'analyser aussi bien de manière directe (satellites émetteurs) que réciproque : dans ce dernier cas, on considère une antenne au sol dont les extrémités sont les deux points P et Q et la formule 3.1 donne alors les franges vues par les satellites.

Notons aussi que la formule 3.1 exprime indifféremment la résolution d'une antenne AB visant dans la direction θ que celle de l'antenne PQ visant elle aussi dans la direction θ .

Formalisation en géométrie "sol" de Lin

Dans le cas où $B_x = b$ et $B_z = 0$, on obtient la relation (approchée) plus connue des radaristes sous le nom d'équation de Lin :

$$\delta R = \frac{x b}{\sqrt{X^2 + H^2}} + \frac{z X H b}{(\sqrt{X^2 + H^2})^3}$$

Phase et différence de marche

Les expressions ainsi obtenues fournissent une différence de trajet. L'application d'un tel formalisme au radar est alors aisée dès lors que l'on se place en régime quasi-monochromatique : on identifie alors les ondes incidentes et réfléchies à des ondes de longueur d'onde λ .

Dans ce cas on peut identifier une différence de trajet de longueur δR à une phase φ telle que :

$$\varphi = \frac{2\pi \delta R}{\lambda}.$$

Comme expérimentalement la phase est une grandeur qui n'est connue que modulo 2π , on voit que cette illumination quasi monochromatique ne permet de quantifier que des variations de trajet inférieures à la longueur d'onde : c'est un des paradoxes apparents de l'interférométrie RSO qui permet, avec des résolutions décimétriques, d'observer des variations de terrains à l'échelle de la longueur d'onde.

Altitude d'ambiguïté (approche de l'optique)

On introduit la notion d'altitude d'ambiguïté h_{amb} , telle que, pour deux points Q et Q' se projetant sur le même point au sol de position x , la rotation de phase soit égale à π (donc une différence de marche de $\frac{\lambda}{2}$). En appliquant la relation 3.2 on obtient :

$$\frac{B_{orth}}{\sqrt{X^2 + H^2}} h_{amb} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow h_{amb} = \frac{\lambda \sqrt{X^2 + H^2}}{2 B_{orth} \sin \theta} \Leftrightarrow h_{amb} = \frac{\lambda H}{2 B_{orth} \cos \theta \sin \theta}.$$

Dans ce cas, on ne peut savoir si l'on a augmenté ou diminué l'altitude de h_{amb} : c'est un problème parfaitement identique à celui du repliement de spectre que l'on rencontre alors.

3.2.2 Formalisation en géométrie "radar"

Le problème majeur des images RSO est que, pour un angle d'incidence donné θ , l'image construite le long de la fauchée (*range*) correspond à un découpage du signal temporel selon un échantillonnage donné respectant le critère de Nyquist. Par exemple, les données ERS-1 sont échantillonnées à 18,96 MHz. Puisque l'on fait une identification entre temps et distance (la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques étant considérée comme constante), chaque fenêtre temporelle est aussi appelée *case distance*. Pour un pas d'échantillonnage δt_0 , on a la distance δr_0 telle que :

$$\delta r_0 = \frac{c\delta t_0}{2}$$

Par construction, tous les points (x, z) vérifiant l'équation

$$x \sin \theta - z \cos \theta = d$$

(d étant une constante donnée) sont confondus dans la même *case distance*.

Aussi l'expression 3.1 ne peut s'appliquer directement puisque, pour observer effectivement un interférogramme, le point Q doit appartenir à une *case distance* différente : c'est donc le problème lié à la géométrie radar.

Considérons donc un point Q distinct de P sur l'image. Si P et Q appartiennent tous les deux au plan horizontal, et connaissant la distance δr entre leurs *case distance*, on a la relation :

$$\delta r = x \sin \theta$$

et la formule 3.2 s'écrit (avec $z=0$) :

$$\delta R = \frac{B_{orth} \delta r}{\sqrt{X^2 + H^2} \tan \theta}.$$

La notion d'altitude d'ambiguïté va aussi changer : ce sera l'altitude d'un point dans une *case distance* donnée telle que la phase tourne de π . Dans une *case distance* donnée z s'écrit :

$$z = x \tan \theta$$

d'où à l'intérieur d'une *case distance* :

$$\delta R = \frac{B_x \cos \theta + B_z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}} \left(\frac{z}{\tan \theta} \cos \theta + z \sin \theta \right) = \frac{B_x \cos \theta + B_z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}} \left(\frac{z}{\sin \theta} \right) \quad (3.3)$$

Notons que les franges topographiques sont alors données par $\frac{B_{orth}}{\sqrt{X^2 + H^2}} \frac{z}{\sin \theta}$, z étant l'altitude du point observé dans la *case distance*.

Dans le cas $B_z = 0$, cette expression permet d'écrire la relation :

$$z = \frac{\sqrt{X^2 + H^2} \sin \theta \delta R}{B_x \cos \theta}$$

qui est celle obtenue par Massonnet [13].

La relation 3.3 permet d'exprimer l'altitude d'ambiguïté z_{amb} :

$$\frac{B_x \cos \theta + B_z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}} \frac{z_{amb}}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{2}.$$

d'où

$$z_{amb} = \frac{\sqrt{X^2 + H^2} \sin \theta}{B_{orth}} \frac{\lambda}{2} = \frac{H \tan \theta}{B_{orth}} \frac{\lambda}{2} \quad (3.4)$$

Remarquons que l'altitude d'ambiguïté est donc inversement proportionnelle à la base orthogonale. On peut alors formuler les règles élémentaires pratiques suivantes :

- En présence d'un fort relief, il faudra une faible base orthogonale.
- En présence d'un faible relief, on pourra utiliser une base orthogonale plus élevée : nous verrons au paragraphe suivant que les lois d'antenne posent une limite supérieure à cette valeur.

3.3 Statistiques des images INSAR [12]

3.3.1 Modélisation des réponses

On suppose que l'on dispose de 2 capteurs : A et B, et que la réponse impulsionnelle de chaque capteur peut s'écrire (expression 1.23) :

$$\tilde{U}(x, y) \sim \text{Sinc}(\pi \tilde{B}_x x) \text{Sinc}(\pi \tilde{B}_y y) = \text{Sinc}\left(\frac{\pi x}{Re_{s_x}}\right) \text{Sinc}\left(\frac{\pi y}{Re_{s_y}}\right)$$

On suppose que le capteur A est situé à une distance $\begin{pmatrix} B_x \\ B_z \end{pmatrix}$ du capteur B (maître). Les réponses de chaque capteur pour une cellule de résolution au point P de coordonnées (x_o, y_o) (distance au nadir, azimuth) s'écrivent :

$$\begin{aligned} s_A(x_o, y_o) &= \iint f(x, y) \exp\left(-j \frac{4\pi R_A}{\lambda}\right) \cdot \tilde{U}(x - x_o, y - y_o) dx dy + n_A \\ s_B(x_o, y_o) &= \iint f(x, y) \exp\left(-j \frac{4\pi R_B}{\lambda}\right) \cdot \tilde{U}(x - x_o, y - y_o) dx dy + n_B \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $f(x, y)$ est la réponse complexe de la surface, R_A, R_B les distances radar-cible, et n_A, n_B les bruits thermiques (complexes).

On s'intéresse à la corrélation entre images et plus particulièrement à la corrélation normalisée D :

$$D = \frac{s_A s_B^*}{|s_A| |s_B|} \quad D \in [0; 1]$$

Sol uniforme

Supposons que la réponse impulsionnelle soit, en lieu et place du sinus cardinal, un simple créneau (notons que cette hypothèse est irréaliste car elle nécessiterait un spectre à large bande). En l'absence de bruit thermique, et en supposant que la zone de sol observée a une réflectivité égale à 1, on a :

$$s_A s_B^* = \iint \exp\left(-j \frac{4\pi R_A}{\lambda}\right) \exp\left(j \frac{4\pi R_B}{\lambda}\right) dx dy = \iint \exp\left(-j \frac{4\pi \delta R}{\lambda}\right) dx dy$$

avec δR correspondant à la différence de parcours entre les trajets PA et PB. En fait, nous avons déjà calculé δR : c'est l'équation 3.2. En supposant une invariance dans le sens de la trace, et sous l'hypothèse de sol plat, on peut écrire :

$$s_A s_B^* = \int \exp\left(-j \frac{4\pi \delta R}{\lambda}\right) dx = \int \exp\left(-j \frac{4\pi B_{orth} x \cos \theta}{R\lambda}\right) dx$$

En supposant R et θ constant dans la cellule de résolution, l'intégration de cette expression s'effectue sans problème et conduit à la relation :

$$D = \frac{\sin\left(\frac{2\pi B_{orth} Re_{s_x} \cos \theta}{R\lambda}\right)}{\left(\frac{2\pi B_{orth} Re_{s_x} \cos \theta}{R\lambda}\right)}$$

Cette expression est égale à 1 pour $B_{orth} = 0$ (la corrélation est parfaite puisque les deux sources sont co-axiales) et à 0 pour une base orthogonale appelée Base Critique telle que sa composante orthogonale $B_{orth,C}$ s'écrive :

$$B_{orth,C} = \frac{R\lambda}{2 Re_{s_x} \cos \theta} \quad (3.6)$$

Dans le cas général, on montre que :

$$D = D_{rot} D_{spatial}$$

Dans cette expression :

– D_{rot} est une fonction de la rotation entre images (si les traces ne sont pas parallèles et font un angle $\Delta\psi$) :

$$D_{rot} = 1 - \frac{2 \sin(\theta) |\Delta\psi| Re_{s_y}}{\lambda}$$

– $D_{spatial}$ ne prend en compte que les variations d'angle d'incidence

$$D_{spatial} = 1 - \frac{2 \cos(\theta) |\Delta\theta| Res_x}{\lambda}$$

On peut prendre comme approximation de $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \frac{|B_x \cos(\theta) + B_z \sin(\theta)|}{\sqrt{X^2 + H^2}} = \frac{B_{orth}}{R} \quad (3.7)$$

$D_{spatial}$ s'écrit alors :

$$D_{spatial} = 1 - \frac{2 \cos(\theta) B_{orth} Res_x}{R \lambda} \quad (3.8)$$

et s'annule pour une valeur de B_{orth} telle que

$$\frac{2 \cos(\theta) B_{orth} Res_x}{R \lambda} = 1$$

ce qui permet de retrouver la notion de base critique B_C (équation 3.6).

On en déduit que, pour $B_{orth} < B_C$:

$$D_{spatial} = 1 - \frac{B_{orth}}{B_C} \quad (3.9)$$

Cas du speckle

L'analyse effectuée ci dessus donne une idée assez correcte de la cohérence, mais ne reflète pas la réalité. En effet, le sol n'est jamais homogène à l'échelle d'une fraction de la longueur d'onde et conduit à la présence de speckle.

Il faut bien se rendre compte que ce speckle est directement lié à la valeur locale de l'incidence de l'onde.

Soit une cellule de résolution $Res_x = \delta x$ et considérons la comme une antenne d'émission : le speckle est alors causé par le fait que cette antenne a une phase non uniforme, et que tout point P_i de cette antenne peut être vu comme une source ponctuelle dont la phase propre φ_i est le résultat du tirage d'une loi uniforme en 0 et 2π .

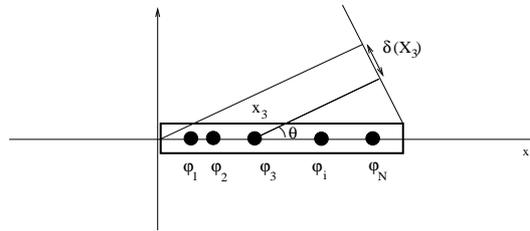


FIG. 3.4 – Antenne-sol, composée de N cibles positionnées en $X_i, i \in [1, N]$, de phase propre φ_i . L'incidence de l'onde a la valeur θ .

Pour N cibles, situées en $X_i, i \in [1, N]$, la sommation spécifique au chatoiement permet d'écrire la valeur du pixel observé selon un angle d'incidence θ :

$$A(\theta) = \sum_{i=1}^N a_i e^{j\varphi_i} e^{2j\pi \frac{X_i \sin \theta}{\lambda}} = a_\theta e^{j\varphi_\theta} \quad (3.10)$$

Pour un autre angle d'incidence θ' , on aurait :

$$A(\theta') = \sum_{i=1}^N a_i e^{j\varphi_i} e^{2j\pi \frac{X_i \sin \theta'}{\lambda}} = a_{\theta'} e^{j\varphi_{\theta'}} \quad (3.11)$$

A priori, le chatoiement ainsi obtenu diffère de celui obtenu avec l'angle d'incidence θ .

La sommation induit une rampe de phase qui dépend de l'angle d'incidence. Si cette rampe ajoute d'un angle θ à un autre angle θ' une valeur de 2π au bord de l'antenne (c'est à dire en B), on peut s'attendre à ce que le chatoiement soit totalement différent.

Comme on peut le remarquer facilement sur la figure 3.5, le cas d'un ajout de 2π revient à poser $BD' - BD = \lambda$.

Or on montre facilement

$$BD = Res_x \sin \theta$$

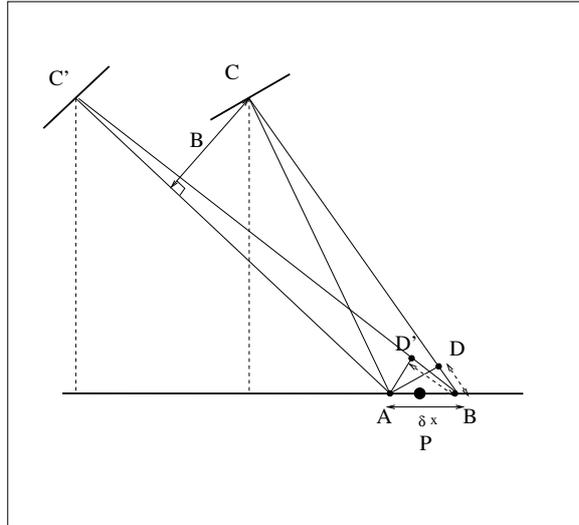


FIG. 3.5 – Radar RSO : l’antenne C émet en direction du sol. Le sol agit alors comme une antenne dont la dimension est la résolution au sol (δx). La phase sur cette antenne est aléatoire (les diffuseurs élémentaires situés sur cette portion de sol n’ont aucune raison d’être corrélés en phase, hormis le cas du miroir plan). Si la même zone du sol est imagée par un autre capteur C' dont l’incidence est $\theta + \delta\theta$, tout revient à considérer que le sol réémet vers ce capteur C' dans une direction faisant un angle $\delta\theta$ avec la direction initiale (correspondant au capteur C) et induisant une rampe de phase supplémentaire liée à $\delta\theta$.

Par un développement limité au premier ordre, on en déduit

$$BD' - BD = Res_x \delta\theta \cos \theta$$

Et pour une différence de λ , on peut écrire :

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Res_x \cos \theta}$$

Comme la base orthogonale peut s’écrire $B_{orth} = R\delta\theta$ (équation 3.7), et considérant le fait qu’il faut prendre en compte le trajet aller et le trajet retour (d’où l’introduction du célèbre facteur 2 propre aux systèmes de mesure d’échos), on en déduit :

$$B_{orth} = \frac{R\lambda}{2 Res_x \cos \theta}$$

ce qui est exactement la formulation de la base critique 3.6.

3.3.2 Les lois des interférogrammes

Rappel : les lois du chatoiement pleinement développé

On sait (voir paragraphe 2.2.1) que, dans le cadre de l’imagerie RSO qui est fondée sur le principe de l’imagerie cohérente, une image complexe “SLC” d’une région homogène suit le modèle circulaire gaussien. Cela signifie que partie réelle (i pour “in-phase”) et partie imaginaire (q pour “quadrature”) sont totalement décorrélées et suivent la même loi normale :

$$P_i(i) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \exp\left(-\frac{i^2}{R}\right)$$

$$P_q(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \exp\left(-\frac{q^2}{R}\right)$$

Rappelons que ce modèle permet de déduire les lois en intensité du chatoiement pleinement développé (speckle) :

- pour une image monovue

$$P(I) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{I}{\mu}\right)$$

- pour une image multivue (L vues)

$$P_L(I) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{LI}{\mu} \right)^{L-1} \exp^{-\frac{LI}{\mu}}$$

Dans cette formulation, les lois sont données avec deux paramètres μ , L . Dans chaque cas, la valeur moyenne et la variance peuvent se calculer en fonction de μ , L :

	valeur moyenne	variance
monovue	μ	μ
multivue	μ	$\frac{\mu}{\sqrt{L}}$

Interférogrammes monovue

Considérons le modèle gaussien circulaire appliqué à 2 mesures ($N=2$). Les deux composantes z_1 et z_2 du vecteur complexe \mathbf{Z} correspondent aux deux images du couple interférométrique. La distribution de \mathbf{Z} s'écrit :

$$p_z(\mathbf{Z}) = \frac{1}{\pi^2 \det(\mathbf{C}_z)} \exp(-\mathbf{Z}^* \mathbf{C}_z^{-1} \mathbf{Z}) \quad (3.12)$$

\mathbf{C}_z est la matrice de covariance de \mathbf{Z} : on l'appelle aussi matrice de cohérence. Elle s'écrit :

$$\mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} E[|z_1|^2] & E[z_1 z_2^*] \\ E[z_1^* z_2] & E[|z_2|^2] \end{pmatrix}$$

ρ_{12} , le coefficient de corrélation complexe (ou degré de cohérence), s'écrit :

$$\rho_{12} = \frac{E[z_1 z_2^*]}{\sqrt{E[|z_1|^2] E[|z_2|^2]}} = D e^{j\beta}$$

D est simplement la cohérence et β le déphasage effectif entre les composantes de \mathbf{Z} . En définissant les réflectivités R_1 et R_2

$$R_1 = E[|z_1|^2] \quad R_2 = E[|z_2|^2]$$

\mathbf{C}_z peut alors s'écrire

$$\mathbf{C}_z = \begin{pmatrix} R_1 & \sqrt{R_1 R_2} D e^{j\beta} \\ \sqrt{R_1 R_2} D e^{-j\beta} & R_2 \end{pmatrix}$$

Pour $D \neq 1$, \mathbf{C}_z^{-1} s'écrit :

$$\mathbf{C}_z^{-1} = \frac{1}{R_1 R_2 (1 - D^2)} \begin{pmatrix} R_2 & -\sqrt{R_1 R_2} D e^{j\beta} \\ -\sqrt{R_1 R_2} D e^{-j\beta} & R_1 \end{pmatrix}$$

Soit un couple de données z_1 et z_2 . La relation 3.12 s'écrit alors :

$$p(z_1, z_2 | R_1, R_2, D, \beta) = \frac{1}{\pi^2 R_1 R_2 (1 - D^2)} \exp \left(-\frac{1}{1 - D^2} \left(\frac{z_1 z_1^*}{R_1} + \frac{z_2 z_2^*}{R_2} - \frac{D(z_1 z_2^* e^{j\beta} + z_1^* z_2 e^{-j\beta})}{\sqrt{R_1 R_2}} \right) \right)$$

Si, au lieu de prendre en compte les valeurs z_1 et z_2 , on considère la distribution conjointe des éléments de Σ_z , matrice de covariance empirique :

$$\Sigma_z = \mathbf{Z}' \mathbf{Z}^* = \begin{pmatrix} I_1 & I_{12} e^{j\varphi} \\ I_{12} e^{-j\varphi} & I_2 \end{pmatrix}.$$

on peut alors exprimer la distribution conjointe des éléments de Σ_z en fonction des réflectivités R_1 et R_2 , et du degré de cohérence $D e^{j\beta}$ sous la forme

$$p(I_1, I_2, I_{12}, \varphi | R_1, R_2, D, \beta) = \frac{1}{\pi^2 R_1 R_2 (1 - D^2)} \exp \left(-\frac{1}{1 - D^2} \left(\frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2} - \frac{2 D I_{12} \cos(\varphi - \beta)}{\sqrt{R_1 R_2}} \right) \right) \quad (3.13)$$

De cette expression, on déduit les distributions du terme anti diagonal de la matrice de covariance empirique, $I_{12} e^{j\varphi}$, terme que l'on appellera **interférogramme complexe**, en ne faisant apparaître que les paramètres dont elles dépendent :

– distribution polaire de l'interférogramme complexe en intégrant 3.13 selon les valeurs I_1 et I_2 :

$$p(I_{12}, \varphi | R_1, R_2, D, \beta) = \frac{2I_{12}}{\pi R_1 R_2 (1 - D^2)} \exp\left(\frac{2I_{12} D \cos(\varphi - \beta)}{\sqrt{R_1 R_2} (1 - D^2)}\right) K_0\left(\frac{2I_{12}}{\sqrt{R_1 R_2} (1 - D^2)}\right) \quad (3.14)$$

avec K_0 fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. La loi est représentée figure 3.6.

– distribution de l'interférogramme (différence de phase de l'interférogramme complexe) en intégrant 3.14 selon les valeurs I_{12} :

$$\begin{aligned} p(\varphi | D, \beta) &= \frac{1 - D^2}{2\pi} \left({}_2F_1\left(1, 1; \frac{1}{2}; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) + \frac{\pi}{2} D \cos(\varphi - \beta) {}_1F_0\left(\frac{3}{2}; -; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) \right) \\ &= \frac{1 - D^2}{2\pi} \frac{1}{1 - D^2 \cos^2(\varphi - \beta)} \left(1 + \frac{D \cos(\varphi - \beta) \cos^{-1}(-D \cos(\varphi - \beta))}{\sqrt{1 - D^2 \cos^2(\varphi - \beta)}} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

La loi est représentée figure 3.7 (gauche).

– distribution de la magnitude de l'interférogramme complexe en intégrant 3.14 selon les valeurs φ :

$$p(I_{12} | R_1, R_2, D, \beta) = \frac{4I_{12}}{R_1 R_2 (1 - D^2)} I_0\left(\frac{2I_{12} D}{\sqrt{R_1 R_2} (1 - D^2)}\right) K_0\left(\frac{2I_{12}}{\sqrt{R_1 R_2} (1 - D^2)}\right) \quad (3.16)$$

La loi est représentée figure 3.7 (droite).

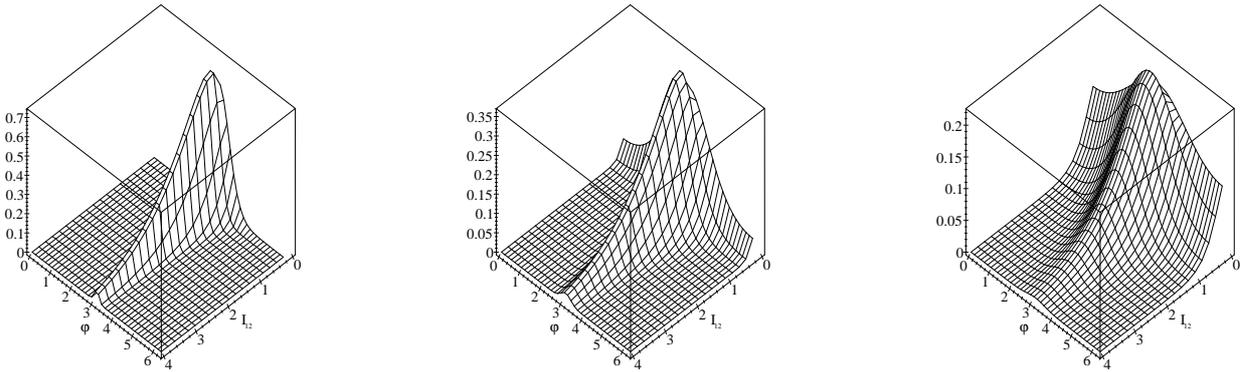


FIG. 3.6 – Distribution polaire de l'interférogramme complexe (équation 3.14) pour $D = 0.95$ (à gauche), $D = 0.80$ (au milieu) et $D = 0.50$ (à droite). φ varie entre 0 et 2π , $R_1 = R_2 = 1$. L'interférogramme n'est localisé autour de $\varphi = \beta = \pi$ que pour de fortes valeurs de la cohérence.

Interférogrammes multivues

Les données multidimensionnelles complexes (N données) de type multivue (L vues) vérifient la distribution de Wishart.

Étant donné L échantillons \mathbf{Z}_k , on peut construire Σ_z , matrice de covariance empirique :

$$\Sigma_z = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{Z}_k {}^t \mathbf{Z}_k^* = \begin{pmatrix} I_1 & I_{12} e^{j\varphi} \\ I_{12} e^{-j\varphi} & I_2 \end{pmatrix}.$$

Si ces échantillons sont indépendants, et étant donnée la matrice de covariance C_z de dimension $N \times N$, Σ_z est distribué selon la loi de Wishart complexe :

$$p(\Sigma_z | C_z) = \frac{L^N |\Sigma_z|^{L-N} e^{-L \text{Tr}(C_z^{-1} \Sigma_z)}}{\pi^{\frac{N(N-1)}{2}} \Gamma(L) \Gamma(L-1) \dots \Gamma(L-N+1) |C_z|^L}$$

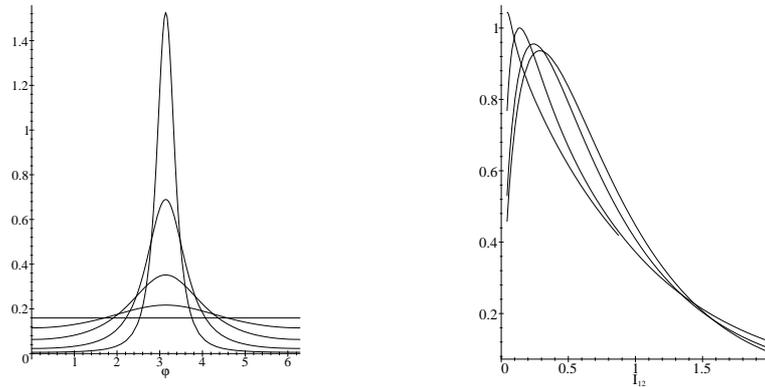


FIG. 3.7 – Distribution de la différence de phase (à gauche, voir la relation 3.15) et de la magnitude (à droite, voir la relation 3.16) de l’interférogramme complexe pour $D = 0, 0.2, 0.5, 0.8$ et 0.95 . On peut noter que pour $D = 0$, *i.e.* en absence totale de cohérence, la phase est équidistribuée sur $[0, 2\pi]$. On a $\beta = \pi$.

L’application de ce formalisme aux lois de l’interférométrie se fait alors avec $N = 2$ (les deux canaux interférométriques). La distribution conjointe des éléments de Σ_z s’exprime alors en fonction des réflectivités R_1 et R_2 , du degré de cohérence entre canaux $De^{j\beta}$ entre les deux canaux et du nombre de vues L sous la forme

$$p(I_1, I_2, I_{12}, \varphi | R_1, R_2, D, \beta, L) = \frac{L^{2L} (I_1 I_2 - I_{12}^2)^{L-2}}{\pi (1 - D^2)^L R_1^L R_2^L \Gamma(L) \Gamma(L - 1)} \exp\left(-\frac{L}{1 - D^2} \left(\frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2} - \frac{2DI_{12} \cos(\varphi - \beta)}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)\right) \quad (3.17)$$

Il est intéressant de remarquer que cette dernière relation n’est valide que pour $L \geq 2$, ce qui interdit de retrouver l’expression monovue 3.13 en faisant tendre L vers la valeur 1 dans l’expression 3.17.

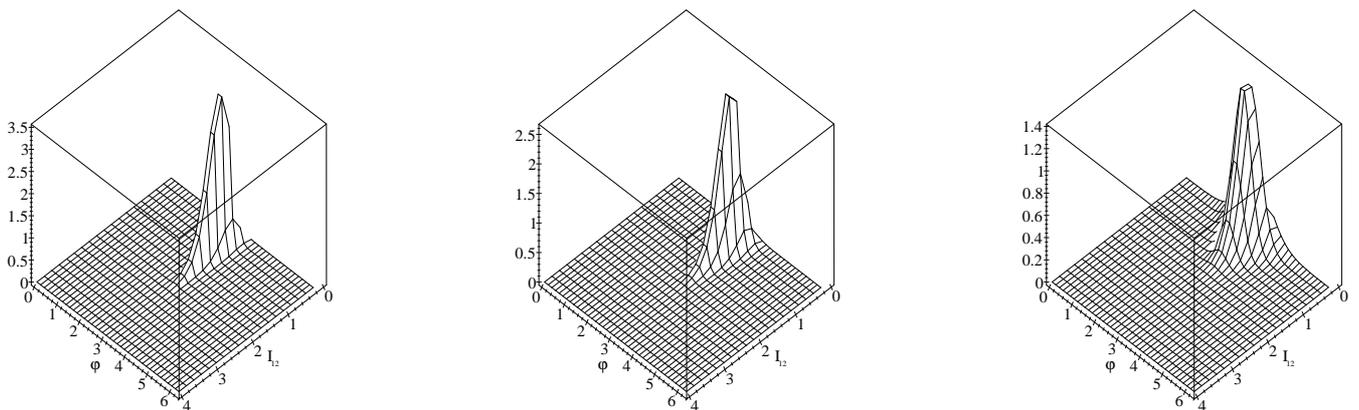


FIG. 3.8 – Distribution polaire de l’interférogramme complexe multivue (formule 3.18) avec $L=9$ pour $D = 0.90$ (à gauche), $D = 0.80$ (au milieu) et $D = 0.50$ (à droite). On peut noter, par rapport à la figure 3.6, un resserrement des courbes autour de $\varphi = \beta = \pi$ du aux effets bénéfiques du multivue.

A partir de cette expression, on déduit les distributions de l’interférogramme complexe $I_{12}e^{j\varphi}$ en ne faisant

apparaître que les paramètres dont elles dépendent :

- distribution polaire de l'interférogramme complexe multivues

$$p(I_{12}, \varphi | R_1, R_2, D, \beta, L) = \frac{2L^{L+1} I_{12}^L}{\pi \Gamma(L) (R_1 R_2)^{\frac{L+1}{2}} (1-D^2)} \exp\left(\frac{2LI_{12} D \cos(\varphi - \beta)}{\sqrt{R_1 R_2} (1-D^2)}\right) K_{L-1}\left(\frac{2LI_{12}}{\sqrt{R_1 R_2} (1-D^2)}\right) \quad (3.18)$$

avec K fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. La loi est illustrée figure 3.8.

On remarque que, dans cette expression, on peut formellement poser $L = 1$ et retrouver la même expression analytique que dans le cas monovue (formule 3.14).

- distribution de l'interférogramme multivues (différence de phase de l'interférogramme complexe)

$$\begin{aligned} p(\varphi | D, \beta, L) &= \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} \left({}_2F_1\left(1, L; \frac{1}{2}; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(L + \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} D \cos(\varphi - \beta) {}_1F_0\left(L + \frac{1}{2}; -; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) \right) \\ &= \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} \frac{1}{2L+1} {}_2F_1\left(2, 2L; L + \frac{3}{2}; \frac{1 + D \cos(\varphi - \beta)}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

La loi est illustrée figure 3.10. Une comparaison avec le cas monovue est donnée figure 3.9.

On remarque que, dans cette expression, on peut formellement poser $L = 1$ et retrouver la même expression analytique que dans le cas monovue (équation 3.15).

- distribution de la magnitude de l'interférogramme complexe multivues

$$p(I_{12} | R_1, R_2, D, L) = \frac{4L^{L+1} I_{12}^L}{\Gamma(L) (R_1 R_2)^{\frac{L+1}{2}} (1-D^2)} I_0\left(\frac{2LI_{12} D}{\sqrt{R_1 R_2} (1-D^2)}\right) K_{L-1}\left(\frac{2LI_{12}}{\sqrt{R_1 R_2} (1-D^2)}\right) \quad (3.20)$$

On remarque que, dans cette expression, on peut formellement poser $L = 1$ et retrouver la même expression analytique que dans le cas monovue (équation 3.16).

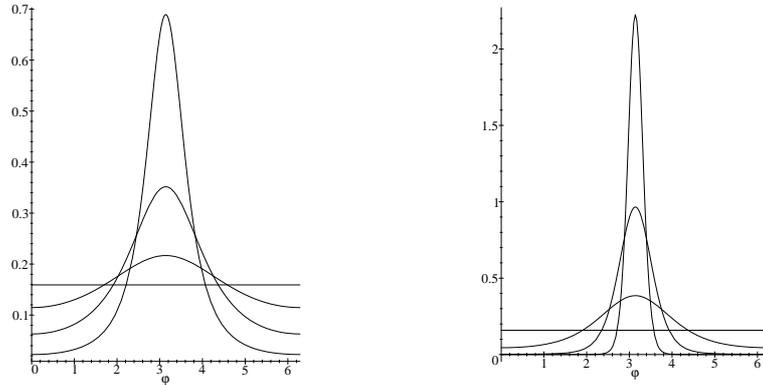


FIG. 3.9 – Comparaison de la distribution de la différence de phase de l'interférogramme monovue (à gauche, équation 3.15) et de l'interférogramme multivue ($L=9$, à droite, équation 3.18) pour $D = 0., 0.2, 0.5,$ et 0.8

Lois de la cohérence empirique

Plus couramment, plutôt que d'étudier I_{12} , magnitude de l'interférogramme complexe, on préfère, en général, utiliser la cohérence complexe empirique définie par la relation :

$$de^{j\varphi} = \frac{\sum_{k=1}^L z_{1,k} z_{2,k}^*}{\sqrt{\sum_{k=1}^L z_{1,k} z_{1,k}^*} \sqrt{\sum_{k=1}^L z_{2,k} z_{2,k}^*}} = \frac{I_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}} e^{j\varphi} \quad L \geq 2. \quad (3.21)$$

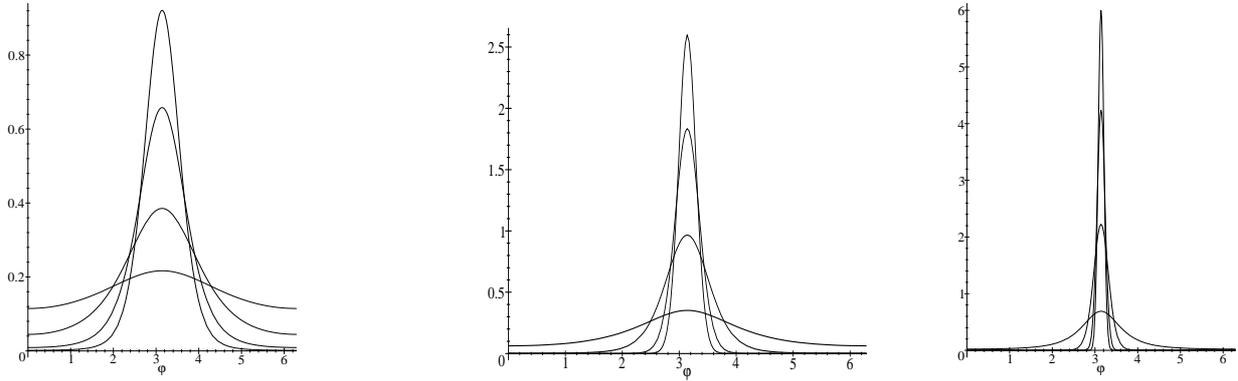


FIG. 3.10 – Distribution de l'interférogramme multivue (différence de phase de l'interférogramme complexe) pour $D=0.2$ (à gauche), $D=0.5$ (au milieu) et $D=0.8$ (à droite), et pour $L = 1, 9, 32$ et 64 (équation 3.19). $\beta = \pi$.

d sera appelée cohérence empirique.

On en déduit les lois de distribution suivantes :

– distribution polaire de la cohérence complexe empirique

$$p(d, \varphi | D, \beta, L) = \left\{ \frac{(1-D^2)^L \Gamma^2(2L)}{2^{2L-2} \Gamma(2L + \frac{1}{2}) \Gamma(L) \Gamma(L-1) \Gamma(\frac{1}{2})} d(1-d^2)^{L-2} \right. \\ \left. {}_2F_1(2L, 2L; 2L + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 + dD \cos(\varphi - \beta))) \right\}$$

– distribution de la différence de phase (équation 3.19)

$$p(\varphi | D, \beta, L) = \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} \left({}_2F_1\left(1, L; \frac{1}{2}; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) \right. \\ \left. + D \cos(\varphi - \beta) {}_1F_0\left(L + \frac{1}{2}; -; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(L + \frac{1}{2})}{\Gamma(L)} \right) \\ = \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} \frac{1}{2L+1} {}_2F_1\left(2, 2L; L + \frac{3}{2}; \frac{1 + D \cos(\varphi - \beta)}{2}\right) \quad (3.22)$$

C'est l'expression de la loi de l'interférogramme multivue.

On en trouve, chez certains auteurs, une autre expression mathématiquement identique :

$$p(\varphi | D, \beta, L) = \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} {}_2F_1\left(1, L; \frac{1}{2}; D^2 \cos^2(\varphi - \beta)\right) \\ + \frac{\Gamma(L + \frac{1}{2})(1-D^2)^L D \cos(\varphi - \beta)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(L)(1-D^2)^{L+\frac{1}{2}}}$$

– distribution de la cohérence empirique d

$$p(d | D, L) = 2(L-1)(1-D^2)^L d(1-d^2)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; d^2 D^2) \quad (3.23)$$

Cette loi est illustrée figure 3.11. Ses moments seront analysés au paragraphe 3.4.2. On peut noter que pour $L = 2$, la probabilité maximale est atteinte pour $d = 1$, ce qui montre que ce choix ($L = 2$) n'a guère d'utilité en pratique.

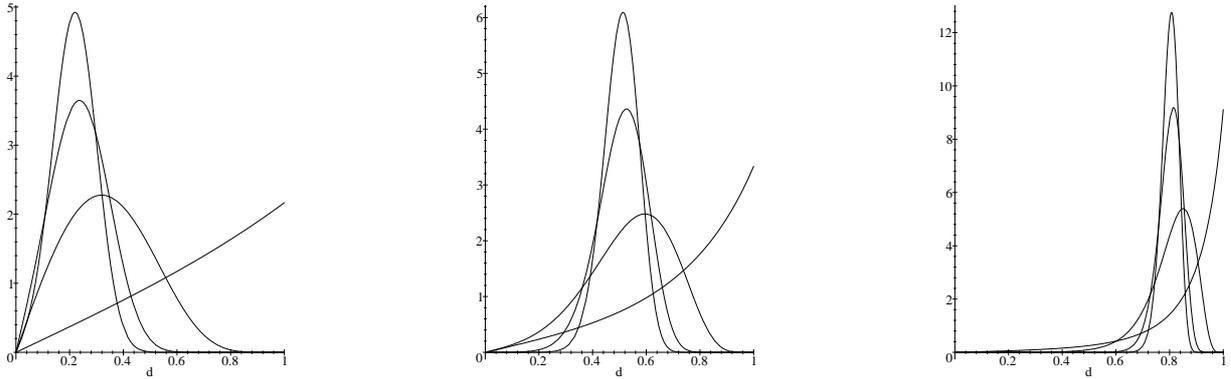


FIG. 3.11 – Distribution de la cohérence empirique de l'interférogramme multivue ($L = 2, 9, 32, 64$) pour $D=0.2$ (à gauche), $D=0.5$ (au milieu) et $D=0.8$ (à droite)

3.4 La construction d'un interférogramme

3.4.1 Principes

Nous avons vu que l'expression de la cohérence complexe empirique s'écrivait (équation 3.21) :

$$de^{j\varphi} = \frac{\sum_{k=1}^L z_{1,k} z_{2,k}^*}{\sqrt{\sum_{k=1}^L z_{1,k} z_{1,k}^*} \sqrt{\sum_{k=1}^L z_{2,k} z_{2,k}^*}} = \frac{I_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}} e^{j\varphi} \quad L \geq 2.$$

3.4.2 Limitations

Estimation de la phase, estimation du relief

L'estimation de la phase s'appuie donc sur la distribution suivante (équation 3.22 avec $\beta = \pi$) :

$$p(\varphi|D, L) = \frac{(1-D^2)^L}{2\pi} \frac{1}{2L+1} {}_2F_1\left(2, 2L; L + \frac{3}{2}; \frac{1-D \cos(\varphi)}{2}\right) \quad (3.24)$$

Malheureusement, il n'est pas possible d'exprimer analytiquement les moments d'une telle distribution : restent alors les méthodes numériques pour les calculer. La figure 3.13 propose donc le tracé de l'écart type de la phase en fonction de D et de L : on voit qu'il y a tout à gagner à utiliser des bases faibles pour améliorer l'estimation de la phase.

Cependant, si on souhaite convertir cette phase en relief, il faut prendre en compte la relation liant variation de phase et altitude d'ambiguïté :

$$z = z_{amb} \frac{\varphi}{\pi} \Rightarrow \delta z = z_{amb} \frac{\delta \varphi}{\pi}$$

Or nous avons vu que l'altitude d'ambiguïté s'exprimait en fonction de la base orthogonale (équation 3.4 en géométrie radar) et qu'il est alors possible de l'exprimer en fonction de la base critique B_C (qui est une constante pour un capteur donné) et de D (grâce à la relation 3.9) :

$$z_{amb} = \frac{\lambda H \tan \theta}{2 B_{orth}} \Leftrightarrow z_{amb} = \frac{\lambda H \tan \theta}{2 B_C (1-D)} \Leftrightarrow z_{amb} = \frac{Res_x \cos \theta \sin \theta}{(1-D)} \quad (3.25)$$

On voit alors que l'altitude d'ambiguïté est inversement proportionnelle à $(1-D)$. Avoir une faible base orthogonale conduit donc à des altitudes d'ambiguïté importante : une faible variation de φ conduira alors à de grandes variations de z puisque l'on peut écrire :

$$\delta z = \frac{\delta \varphi}{(1-D) \pi} Res_x \cos \theta \sin \theta. \quad (3.26)$$

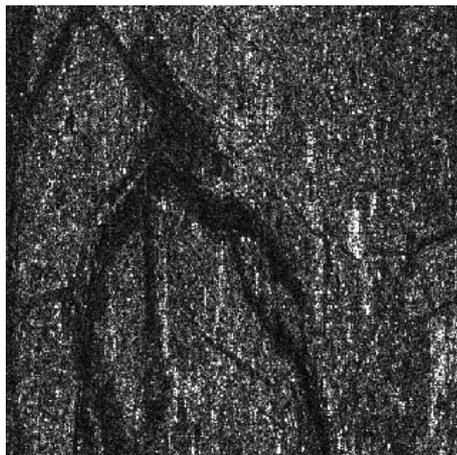
La variance de l'altitude est directement liée à l'expression $\frac{\delta\varphi}{(1-D)}$.

On arrive donc à la conclusion suivante : réduire la base orthogonale est bénéfique pour la variance de la phase, mais néfaste pour la qualité de l'estimation de l'élévation. On peut donc envisager deux comportements possibles :

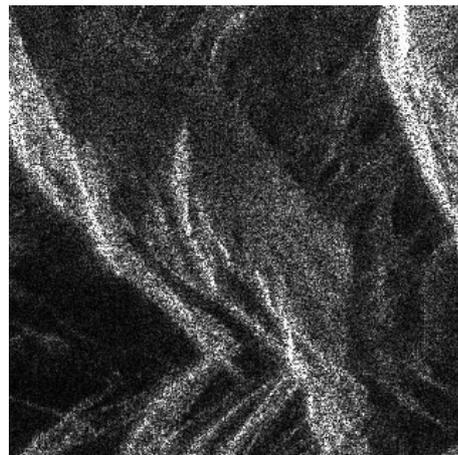
- soit les effets bénéfiques de la diminution de la variance de la phase l'emporte sur les effets négatifs de l'augmentation de l'altitude d'ambiguïté. Dans ce cas, on recherchera à avoir une base la plus petite possible.
- soit les effets négatifs liés à l'altitude d'ambiguïté l'emportent et alors on peut s'attendre que pour une valeur de D comprise entre 0 et 1, il existe un optimum (remarquons que pour $D = 0$, on en peut rien déduire pour l'altitude et que donc la variance sur l'altitude passe alors par un maximum).

Pour évaluer ce problème, nous avons choisi de prendre l'écart type de la phase pour représenter l'erreur sur la connaissance de la phase $\delta\varphi$. Nous avons donc tracé figure 3.13 (en bas, à droite) l'écart-type de la phase divisé par $\pi(1 - D)$ en fonction de D pour des valeurs entre 0.4 et 0.9 et pour différentes valeurs de L . On peut alors observer que la valeur varie inversement proportionnellement avec la base : l'erreur en altitude sera donc plus faible avec de grandes bases. Soulignons que la notion d'écart type lié à la distribution de probabilité $p(\varphi|D, \beta)$ n'a de sens que si la loi est à peu près localisée autour de la valeur β : ceci est peu plausible dans le cas $L = 1$ et $D < 0.5$, ce qui limite le raisonnement précédent.

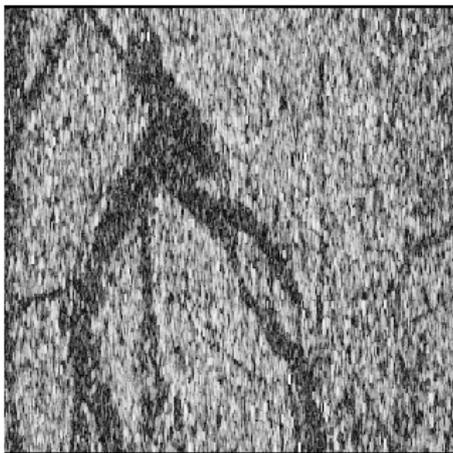
Il est intéressant de noter qu'il existe un minimum pour les valeurs de L supérieures à 3 localisé autour de la valeur $D = 0.6$, et que les valeurs s'écartent peu de ce minimum sur une grande plage d'utilisation : on pourra donc raisonnablement utiliser des valeurs de D comprises entre 0.5 et 0.9.



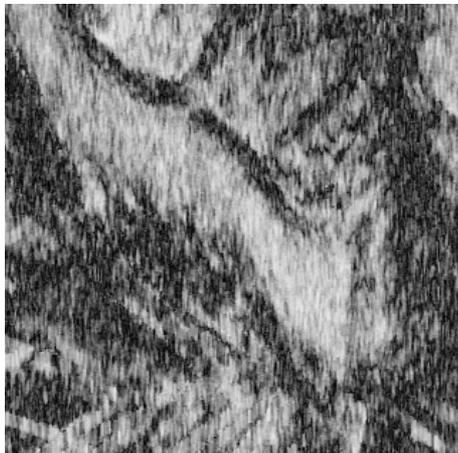
a. Image de Paris ERS-SLC ©ESA



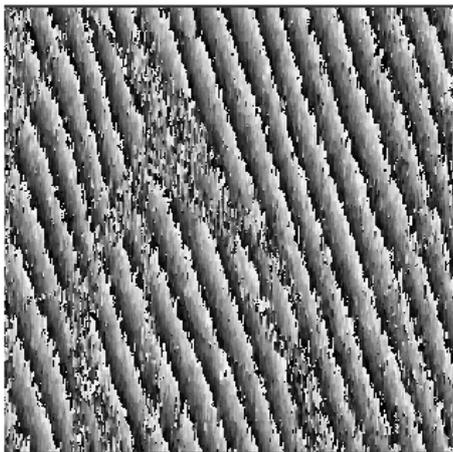
b. Image de l'Aiguille Verte ERS-SLC ©ESA



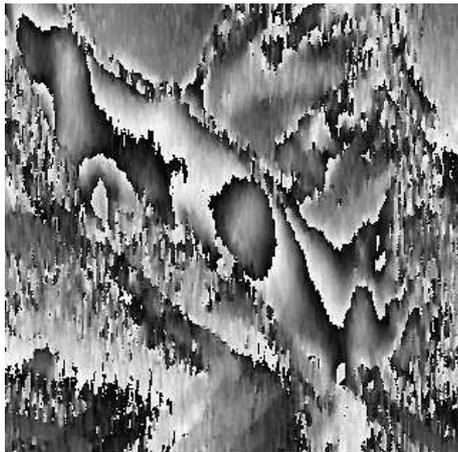
c. Interférogramme : cohérence



d. Interférogramme : cohérence



e. Interférogramme : phase



f. Interférogramme : phase

FIG. 3.12 – Construction d'interférogrammes avec une fenêtre 2×9 sur Paris (à gauche) et au voisinage de l'Aiguille Verte (à droite). Sur Paris, on observe principalement les franges orbitales. Sur l'image de l'Aiguille Verte, on note que les données ont été au préalable corrigées des effets orbitaux : seules demeurent les franges topographiques ainsi que les franges dues au mouvement propre entre les deux acquisitions. C'est ce qui explique pourquoi on observe un régime de frange lié au mouvement propre du glacier d'Argentière. Sur l'image de Paris, la cohérence est nulle sur la Seine et sur les parties arborées

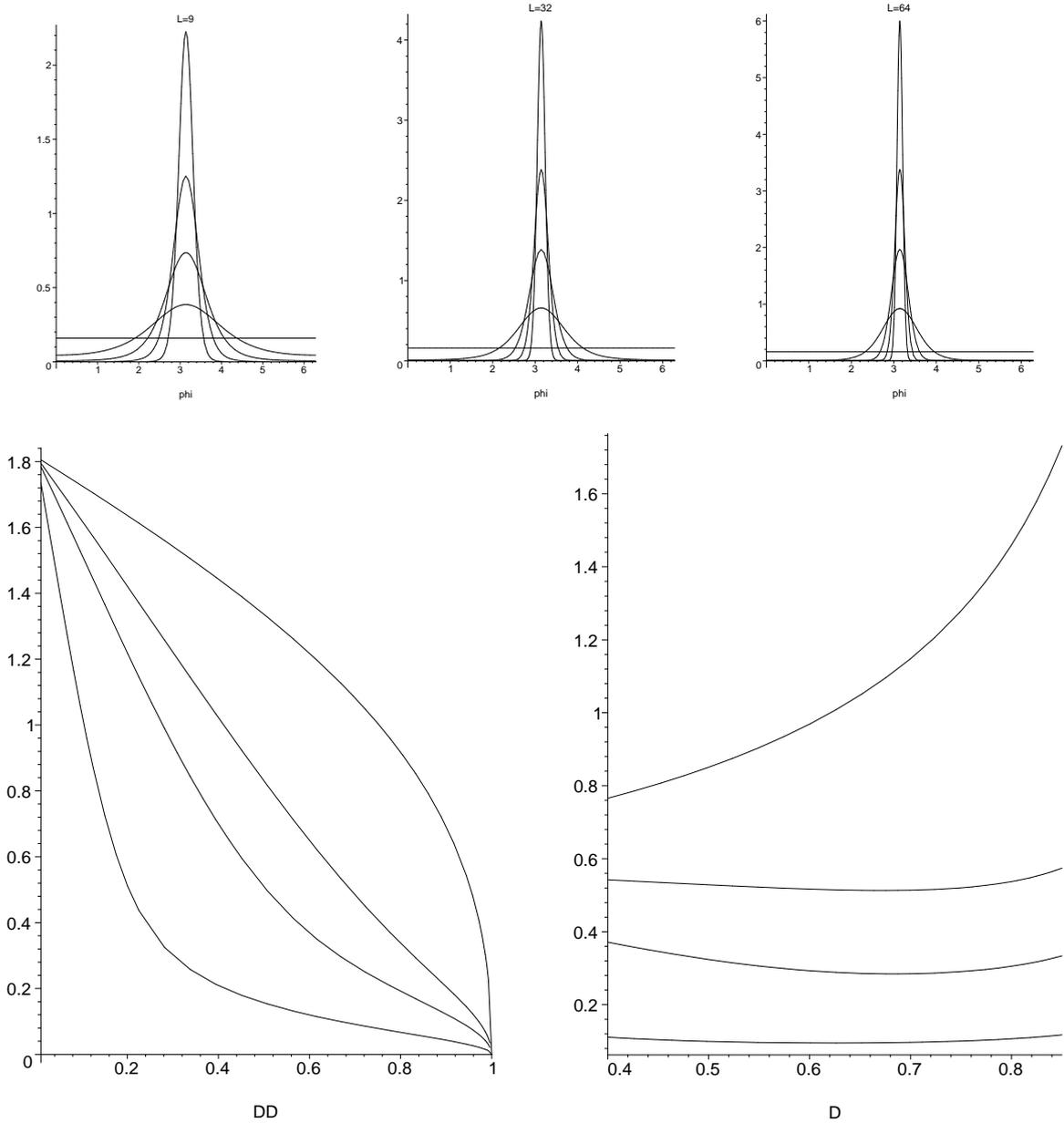


FIG. 3.13 – Première ligne : densité de probabilité de φ pour différentes valeurs de D ($D = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$) avec $\beta = \pi$. Seconde ligne (gauche) : écart-type de la phase empirique de l'interférogramme multivue pour $L = 1, 4, 9$ et 64 (courbe identique à celle publiée par Zebker [18]). Seconde ligne (droite) : la même expression divisée par $\pi(1 - D)$.

Estimation de la cohérence

Pour la cohérence, il faut utiliser la relation 3.23

$$p(d|D, L) = 2(L - 1)(1 - D^2)^L d(1 - d^2)^{L-2} {}_2F_1(L, L; 1; d^2 D^2)$$

Il est possible d'en calculer analytiquement la transformée de Mellin, ce qui permet d'écrire la fonction génératrice des moments :

$$m_n = (1 - D^2)^L \frac{\Gamma(L) \Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(L + \frac{n}{2})} {}_3F_2\left(L, L, \frac{n+2}{2}; 1, L + \frac{n}{2}; D^2\right)$$

On a alors les deux premiers moments :

$$m_1 = (1 - D^2)^L \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(L)}{2 \Gamma(\frac{1}{2} + L)} {}_3F_2\left(L, L, \frac{3}{2}; 1, L + \frac{1}{2}; D^2\right)$$

$$m_2 = (1 - D^2)^L \frac{1}{L} {}_3F_2(L, L, 2; 1, L + 1; D^2)$$

On peut alors facilement en déduire une expression de la variance.

Le mode de cette distribution n'a pas d'expression analytique. On peut cependant en donner des valeurs numériques (avec Maple par exemple). Les tableaux suivants donnent le moment d'ordre 1, son écart type et le mode pour les mêmes valeurs du paramètre D que dans le cas de la figure 3.14.

$L = 9$				$L = 32$				$L = 64$			
d	m_1	écart-type	mode	d	m_1	écart-type	mode	d	m_1	écart-type	mode
0.	0.300	0.146	0.258	0.	0.157	0.080	0.128	0.	0.110	0.057	0.0894
0.2	0.344	0.159	0.319	0.2	0.241	0.102	0.237	0.2	0.220	0.079	0.220
0.4	0.461	0.168	0.502	0.4	0.414	0.101	0.429	0.4	0.407	0.073	0.414
0.6	0.623	0.145	0.684	0.6	0.606	0.080	0.623	0.6	0.603	0.056	0.612
0.8	0.806	0.088	0.851	0.8	0.801	0.046	0.815	0.8	0.801	0.032	0.807

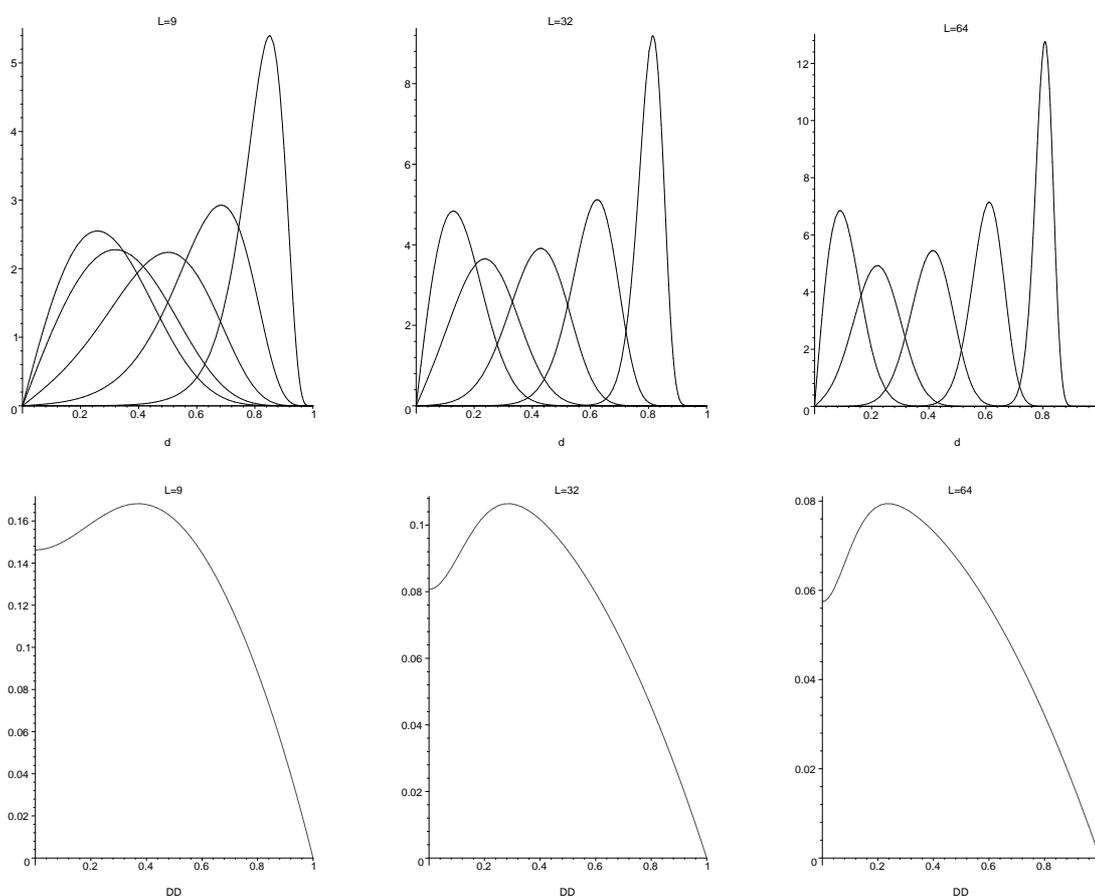


FIG. 3.14 – Première ligne : densité de probabilité de d pour différentes valeurs de D ($D = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$). Seconde ligne : écart-type de la cohérence empirique de l'interférogramme multivue. Les figures de gauche correspondent à $L = 9$, du milieu à $L = 32$ et celles de droite à $L = 64$.

Les courbes figure 3.14 montrent que l'écart type de la cohérence empirique varie quasiment linéairement pour des valeurs de D comprises entre 0.4 et 1 : si l'on cherche à analyser prioritairement la cohérence, on recherchera tout naturellement des bases faibles.

3.4.3 Interférométrie différentielle

L'utilisation de plusieurs capteurs permet la mise en œuvre de l'interférométrie différentielle qui permet d'estimer une possible différence d'altitude en un point considéré (dû par exemple à un séisme).

Pour en comprendre la philosophie, considérons un capteur esclave supplémentaire C , placé en B'_x, B'_z , ce qui correspond à une base orthogonale B'_{orth} . Supposons aussi que le point Q soit vu par le capteur C avec une légèrè

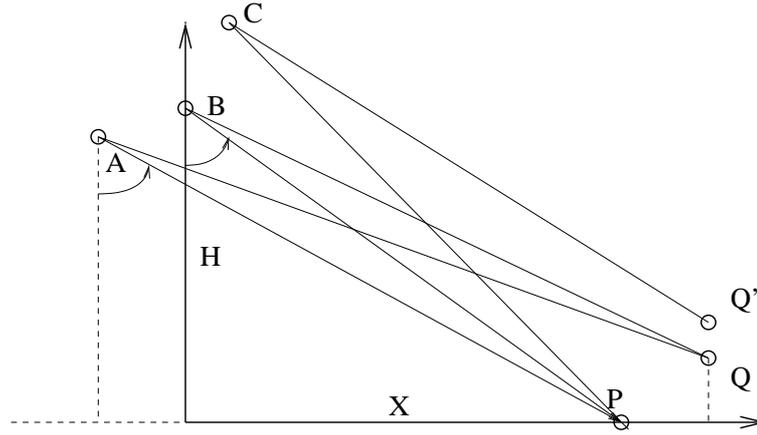


FIG. 3.15 – Interférométrie différentielle, hypothèse de terre plate.

différence d'altitude δz de l'ordre d'une fraction de la longueur d'onde (le point Q se trouve alors en Q' : voir figure 3.15).

Le mouvement du point Q se traduira par une modification du parcours CQ de la forme :

$$d(CQ') - d(CQ) = \delta z \cos \theta$$

La différence de trajet pour les capteurs A et B (équation 3.2) s'écrit :

$$\delta R = B_{orth} \frac{x \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{x \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}} = \frac{\delta R}{B_{orth}} \quad (3.27)$$

Entre les capteurs C et B, et en considérant qu'entre les mesures le point Q se soit déplacé en Q', on a la différence de trajet $\delta R'$:

$$\delta R' = B'_{orth} \frac{x \cos \theta + z \sin \theta}{\sqrt{X^2 + H^2}} + \delta z \cos \theta$$

ce qui peut se réécrire en utilisant la relation 3.27 :

$$\delta R' = \frac{B'_{orth}}{B_{orth}} \delta R + \delta z \cos \theta$$

On voit dans cette dernière relation qu'il est alors possible de retrouver une variation d'altitude δz sans connaître pour autant la géométrie locale du sol : il suffit pour cela de connaître la géométrie du système de capteurs (bases orthogonales et angle d'incidence) ainsi que les différences de marche qui peuvent être fournies par la mesure de la phase. On a alors :

$$\varphi_{CB} = \frac{B'_{orth}}{B_{orth}} \varphi_{BA} + 2\pi \frac{\delta z \cos \theta}{\lambda} \quad (3.28)$$

La phase n'étant connue que modulo 2π , les variations d'altitude pouvant être ainsi mesurées doivent vérifier :

$$\delta z \in \left[-\frac{\lambda}{2 \cos \theta}; \frac{\lambda}{2 \cos \theta} \right]$$

On a donc ainsi un moyen de mesurer de très faibles variations de relief (puisqu'elles sont de l'ordre de la longueur d'onde), ce qui a un intérêt majeur en sismologie ou en volcanologie.

Nous avons vu que l'estimation de la phase pouvait être entachée de biais et d'imprécision lié aux caractéristiques du chatoiement (paragraphe 3.4.2). En particulier, si on effectue une estimation multivue, il est nécessaire de considérer à la fois la nécessité de diminuer la base pour réduire l'écart type sur la mesure de la phase, et la nécessité d'avoir une base pas trop petite (terme en $1/(1-D)$) pour permettre une reconstruction correcte du relief.

Or nous voyons une problématique identique dans le cadre de l'interférométrie différentielle puisque l'expression 3.28 exhibe un terme en $\frac{\varphi_{BA}}{B_{orth}}$ analogue à celui que nous avons rencontré dans l'expression 3.26 (terme en $\frac{\delta \varphi}{(1-D)}$). On peut donc proposer la méthodologie suivante :

- pour les capteurs A et B, choisir une base assez grande pour optimiser $\frac{\delta\varphi_{BA}}{B_{orth}}$
- pour les capteurs B et C, choisir une base aussi petite que possible (remarquons que, dans le cas limite $B'_{orth} = 0$, il suffit de n'avoir que les capteurs B et C !!)

3.5 Conclusions

L'interférométrie est donc une technique permettant à partir d'images RSO de remonter sur des grandeurs liées au relief. Si la phase est ainsi reconstruite, reste alors à dérouler les franges pour avoir une information absolue de relief. C'est une étape importante, mais source de surprises en dimension 2 : on trouvera par exemple dans [12] des informations relatives aux diverses techniques pouvant être utilisées dans le contexte des images RSO.

Chapitre 4

Le traitement des données polarimétriques



Ce chapitre a pour but essentiel de démystifier le radar polarimétrique. En effet, les données polarimétriques sont encore en accès restreints et ce thème de recherche est encore en plein effervescence. De plus, la littérature sur le domaine se mélange avec des documents de l'optique. Aussi, ce chapitre est principalement dédié aux modèles géométriques de la polarimétrie. Le dernier paragraphe montrera l'utilisation de ce type de données en classification.

4.1 Outils de description des ondes polarisées

4.1.1 L'ellipse dans tous ses états

Base "observateur"

Soit une onde électromagnétique se propageant en milieu homogène dans la direction Oz , qui est celle du vecteur d'onde \vec{k} normal à la surface d'onde.

Dans le plan localement tangent à cette surface, les axes peuvent être choisis arbitrairement par un observateur : soient donc les directions Ox et Oy définis par les vecteurs orthogonaux entre eux \vec{n}_x et \vec{n}_y . Ces axes définissent donc la base observateur.

Sur ces deux axes, l'équation de propagation est vérifiée et, dans le cas d'une solution de type harmonique, on peut alors écrire le système sous sa forme la plus générale possible :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos(\phi(t, z) - \delta_x) \\ E_y &= a_y \cos(\phi(t, z) - \delta_y) \end{aligned}$$

Il est possible, sans perte de généralité, de réécrire ces expressions en introduisant deux termes de phase :

– $\alpha = \phi(t, z) - \delta_x$, qui est la phase absolue

– $\delta = \delta_y - \delta_x$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos(\alpha) \\ E_y &= a_y \cos(\alpha - \delta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

α dépend du temps et de l'espace et représente le terme spécifique à la propagation d'une onde harmonique, les expressions selon Ox et Oy ne différant que par un terme de phase constant δ et par leur amplitudes.

L'angle δ appartient au domaine ouvert $]-\pi; \pi[$,

Le champ total s'écrit :

$$\vec{E} = E_x \vec{n}_x + E_y \vec{n}_y$$

Ce système décrit en réalité une ellipse. Avant tout calcul, il suffit de remarquer que si on attaque un oscilloscope avec, en entrée horizontale le signal E_x et en entrée verticale le signal E_y , puisque le terme dépendant du temps est identique, on obtient au cours du temps une figure de Lissajoux bien connue : l'ellipse. On sait alors que l'allure de ces figures ne dépend que de a_x , a_y et δ . Remarquons tout de suite que, si l'on fait varier le temps (*i.e.* si un observateur placé en un point donné observe l'allure du champ décrit par la relation 4.1), on a alors différents cas selon la valeur de δ :

– Si $\delta = 0$, alors le champ est colinéaire à la droite $a_x y - a_y x = 0$

– Si $\delta = \pi/2$, alors le champ décrit une ellipse dans le sens direct puisque l'on a (voir figure 4.1) :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos(\alpha) \\ E_y &= a_y \cos(\alpha - \pi/2) = a_y \sin(\alpha) \end{aligned}$$

– Si $\delta = \pi$, alors le champ est colinéaire à la droite $a_x y + a_y x = 0$

– Si $\delta = -\pi/2$, alors le champ décrit une ellipse dans le sens indirect puisque l'on a :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos(\alpha) \\ E_y &= a_y \cos(\alpha + \pi/2) = -a_y \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Un premier calcul montre que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} - 2 \frac{E_x E_y}{a_x a_y} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

et on sait que cette égalité est une représentation possible d'une ellipse.

En s'inspirant des solutions particulières $\delta = \pi/2$ et $\delta = -\pi/2$, on peut donner une signification à l'angle δ , qui représente le signe de l'hélicité :

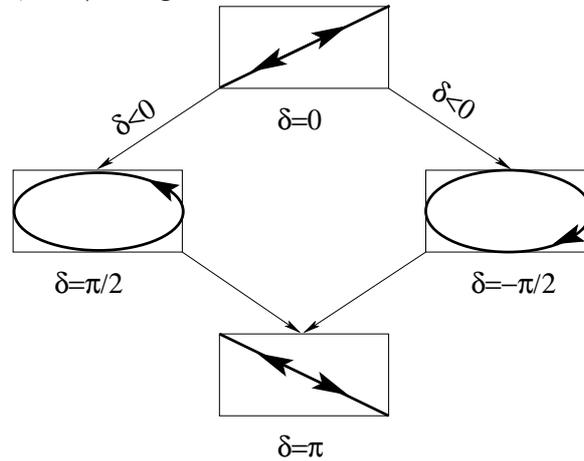


FIG. 4.1 – Représentation en fonction de δ de l'allure du champ E : $\delta \in [0; \pi]$ à gauche, $\delta \in [0; -\pi]$ à droite

- si $\delta > 0$, le vecteur d'onde \vec{k} se déduit par produit vectoriel de \vec{n}_x avec \vec{n}_y (pour un observateur regardant l'onde qui se propage vers lui, l'ellipse est décrite vers la gauche et on parle d'onde polarisée elliptiquement vers la gauche).
- si $\delta < 0$, on parle d'hélicité négative ou d'onde polarisée elliptiquement vers la droite.

Au cours du temps, le champ va donc s'exprimer comme un point sur l'ellipse, la phase absolue δ paramétrant cette position (figure 4.2).

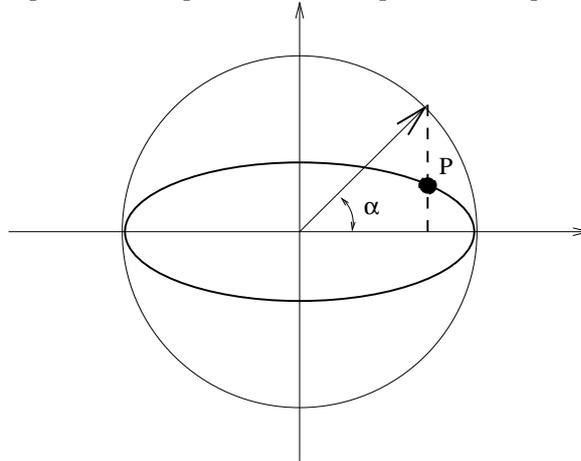


FIG. 4.2 – Au cours du temps et de l'espace, un point \mathbf{P} va se déplacer sur l'ellipse en étant paramétré par α , la phase absolue.

Reste à généraliser cette analyse pour des valeurs quelconques de δ . Avant de poser les calculs (ce qui fera l'objet du paragraphe suivant), il est instructif de réécrire l'expression de E_y (équation 4.1) :

$$\begin{aligned} E_y &= a_y \cos(\alpha - \delta) \\ &= a_y \cos(\delta) \cos(\alpha) - a_y \sin(\delta) \sin(\alpha) \\ &= a'_y E_x - a''_y \sin(\alpha) \end{aligned}$$

E_y est la somme d'un terme proportionnel à E_x et d'un terme en quadrature avec E_x , le "dosage" de l'expression étant piloté par $\cos(\delta)$ et $\sin(\delta)$. Si $\delta = 0$, il n'y a que polarisation linéaire et si $\delta = \pi/2$, on a une ellipse dont grand axe et petit axe sont liés à \vec{n}_x et \vec{n}_y (donc au référentiel observateur).

Base de polarisation

Il est d'usage de vouloir représenter cette ellipse dans son référentiel propre, appelé base de polarisation, et tel que ses demi-axes (a, b) soient colinéaires aux axes de ce référentiel. Soit Ψ l'inclinaison que fait le grand axe par rapport à l'axe initial Ox . Les directions des axes propres OX et OY sont définies par \vec{n}_X avec \vec{n}_Y (voir figure 4.3). Les relations permettant de décrire l'ellipse dans son référentiel propre en fonction de sa description dans un repère "observateur" sont assez fastidieuses à établir [16]. On obtient ainsi :

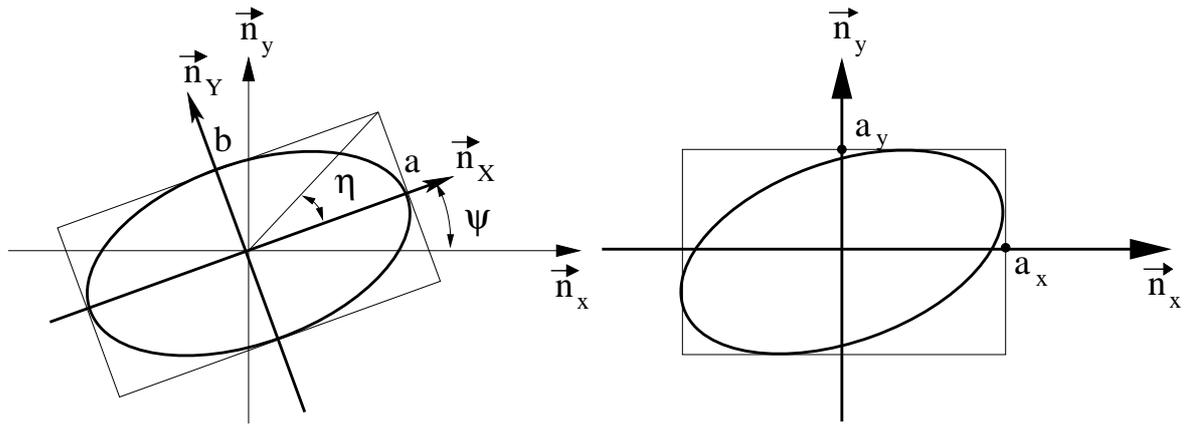


FIG. 4.3 – Représentation schématique d’une onde polarisée elliptiquement : à gauche dans son rectangle naturel (\vec{n}_x, \vec{n}_y), à droite dans le rectangle lié à l’observateur (\vec{n}_x, \vec{n}_y).

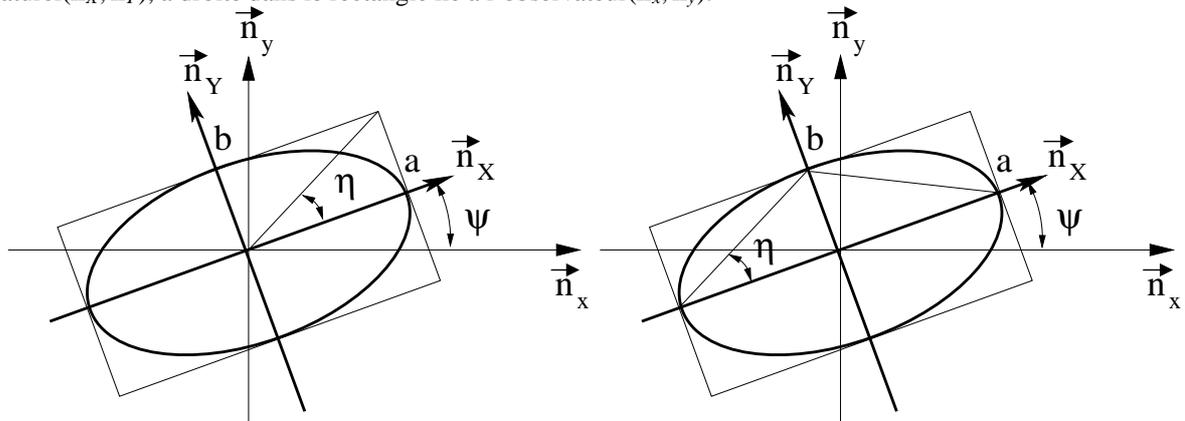


FIG. 4.4 – Représentation schématique d’une onde polarisée elliptiquement : autre représentation de l’angle d’ouverture η .

- les descripteurs de l’ellipse (demi grand axe, demi petit axe) :

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{2a_x^2 + 2a_y^2 + 2\sqrt{(a_x^2 - a_y^2)^2 + 4a_x^2 a_y^2 \cos^2 \delta}}$$

$$b = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{\sqrt{2a_x^2 + 2a_y^2 + 2\sqrt{(a_x^2 - a_y^2)^2 + 4a_x^2 a_y^2 \cos^2 \delta}}}$$

- la grandeur A :

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- l’angle Ψ appelé angle d’orientation de l’ellipse (qui correspond à la rotation liée au changement de repère) :

$$\Psi = \frac{1}{2} \text{Atan} \left(\frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2} \right)$$

- l’angle η appelé angle d’ouverture ou angle d’ellipticité :

$$\eta = \text{Atan} \left(\frac{b}{a} \right) = A \tan(2a_x a_y \cos \delta)$$

La base de polarisation peut donc se décrire par 4 paramètres. Cette description étant redondante, on se contente en général du triplet (Ψ, η, A) .

Une curiosité des ellipses porte sur la grandeur A : en effet, on montre que

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Donc, pour tout référentiel “observateur”, la grandeur $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ est constante et représentative de l’ellipse.

Il existe d’autres invariants dans les ellipses, par exemple la relation :

$$a b = a_x a_y \sin(\delta) \quad (4.2)$$

Cette dernière relation permet alors de retrouver les expressions souvent utilisées pour décrire Ψ et η :

$$\begin{aligned} \tan 2\Psi &= \frac{2 a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2} \\ \sin 2\eta &= \frac{2 a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Deux cas particuliers méritent un certain intérêt :

- Si $\delta = 0$, alors $b = 0$: l’ellipse est dégénérée et se réduit à un segment dans n’importe quel référentiel. On a alors $\eta = 0$ et, dans la base de polarisation, l’ellipse dégénérée appartient à l’axe OX.
- Si $a = b \neq 0$, alors $\delta = \pi/2$ (en utilisant par exemple la relation 4.2), et l’ellipse est un cercle dans n’importe quel référentiel. On a alors $2\eta = \pi/2$ et Ψ est indéterminé.

Rotation de la base de polarisation

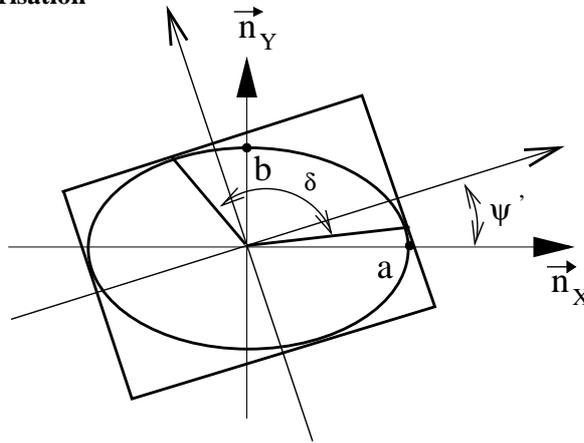


Fig. 4.5 – Passage par rotation d’angle Ψ' de la base de polarisation à un référentiel observateur. L’angle δ' a dans ce genre de référentiel une signification particulière (angle entre les points de contact de l’ellipse au rectangle dans lequel elle est inscrite).

Il s’avère instructif de poser le problème inverse à celui précédemment traité, *i.e.* d’analyser les effets d’une rotation d’angle Ψ' sur la base de polarisation.

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y e^{j\delta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Psi' & -\sin \Psi' \\ \sin \Psi' & \cos \Psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ jb \end{pmatrix}$$

Après quelques calculs, on trouve alors les paramètres a'_x , a'_y , et δ' associés à ce repère observateur :

$$\begin{aligned} a'_x &= \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin(\Psi')^2} \\ a'_y &= \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin(\Psi')^2} \\ \delta' &= \text{Atan} \left(\frac{2ab}{\sin(2\Psi') (a^2 - b^2)} \right) \end{aligned}$$

On peut ainsi analyser deux cas particuliers triviaux :

- Dans le cas d’une polarisation linéaire ($b = 0$), on a bien évidemment $\delta' = 0$. La polarisation demeure linéaire !!
- Dans le cas d’une polarisation circulaire ($a = b$ et $\delta = \pi/2$), on obtient $\delta' = \pi/2$. La polarisation demeure circulaire !!

4.1.2 Vecteurs de Pauli et quaternions

Introduction

Les rotations dans l'espace tridimensionnels sont source de problème puisque :

- leurs représentations se composent en général de trois angles (angles d'Euler, angles de Bryant, ...)
- les rotations ne commutent pas
- certaines représentations présentent parfois des cas critiques ne permettant pas leur inversion.

Ces problèmes sont bien connus en robotique, dans certains problèmes d'espace tridimensionnels (représentation des couleurs), en mécanique quantique, ...

Aussi, depuis le milieu du XIX^{ème} siècle, des mathématiciens se sont penchés sur ces problèmes de représentations. Sont ainsi apparus les quaternions (initialement les hypercomplexes de Hamilton en 1843), les algèbres de Lie, les matrices de Pauli, soit un certain nombre d'outils utilisés directement ou indirectement dans le monde de la polarimétrie.

Le groupe unitaire SU(2) et les matrices de Pauli

Le groupe unitaire de degré 2 SU(2) est défini par les matrices complexes de dimension 2 s'exprimant comme

$$M = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$$

et de déterminant unité : $aa^* + bb^* = 1$.

Par définition ce sont des matrices unitaires et elles vérifient :

$$M M^* = M^* M = Id$$

où Id est la matrice identité et M^* est la matrice adjointe.

Un des plus célèbres exemples de matrices appartenant à SU(2) est construit à partir des matrices de Pauli. Ces matrices sont définies par :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

Elles vérifient aussi :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = Id \\ \text{Tr}(\sigma_1) = \text{Tr}(\sigma_2) = \text{Tr}(\sigma_3) = 0$$

On leur associe la matrice identité $\sigma_0 = Id$ (qui n'est pas de trace nulle).

Il est alors possible de construire une base de SU(2) en prenant les matrices Π_j construites à partir des matrices de Pauli :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= j \sigma_1 = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} \\ \Pi_2 &= j \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} \\ \Pi_3 &= j \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui sont donc des matrices unitaires puisqu'elles vérifient

$$(\Pi_k^*)^t \Pi_k = 1 \quad \forall k \in [1, 3],$$

c'est à dire

$$(\Pi_k)^{-1} = (\Pi_k^*)^t.$$

Le groupe des matrices de Pauli est donc isomorphe au groupe spécial unitaire SU(2).

Propriétés

Les matrices Π_j vérifient des propriétés extrêmement caractéristiques ;

$$\Pi_1^2 = \Pi_2^2 = \Pi_3^2 = -Id$$

$$\Pi_1\Pi_2 = -\Pi_2\Pi_1$$

$$\Pi_1\Pi_3 = -\Pi_3\Pi_1$$

$$\Pi_2\Pi_3 = -\Pi_3\Pi_2$$

Ce sont des relation formellement identiques à celles conduisant à la définition des quaternions que nous allons voir maintenant.

4.1.3 Les quaternions

Les quaternions sont définis par trois nombres “hypercomplexes” I, J, K tels que

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \quad IJ = -JI \quad IK = -KI \quad JK = -KJ$$

On en déduit alors :

$$IJ = K \quad JK = I \quad KI = J$$

Un quaternion s’exprime comme $a + bI + cJ + dK$. Un quaternion tel que $a = 0$ s’appelle quaternion purement vectoriel.

Produit de quaternions

Le produit de deux quaternions n’étant pas commutatif, la formule donnant le produit d’un quaternion $Q = a + bI + cJ + dK$ par le quaternion $Q' = a' + b'I + c'J + d'K$ s’obtient aisément, mais les relations sont lourdes :

$$\begin{aligned} Q'' &= (a + bI + cJ + dK)(a' + b'I + c'J + d'K) \\ &= a'a + b'bI + c'cJ + d'dK \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd') \\ &\quad + (ab' + ba' + cd' - dc')I \\ &\quad + (ac' + ca' + db' - bd')J \\ &\quad + (ad' + da' + bc' - cb')K \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cependant, il est possible de trouver des représentations simplifiant formellement cette opération. Deux pistes sont possibles :

- trouver une représentation matricielle (matrice $4 \times 4 \in \mathbb{R}$) pour Q et vectorielle (dimension 4) pour Q' . En posant

$$M_Q = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad V_{Q'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

on montre facilement que l’on obtient le résultat de l’équation 4.4 en calculant

$$M_Q \times V_{Q'} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' \\ ab' + ba' + cd' - dc' \\ ac' + ca' + db' - bd' \\ ad' + da' + bc' - cb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \\ d'' \end{pmatrix} = V_{Q''}$$

- trouver une représentation matricielle (matrice $2 \times 2 \in \mathbb{C}$) pour Q et Q' . Si l’on pose

$$M_Q = \begin{pmatrix} a - jd & -b + jc \\ b + jc & a + jd \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

il est facile de montrer que

$$M_Q \times M_{Q'} = M_{Q''}$$

Relations entre matrices de Pauli et quaternions

Formellement, les matrices de Pauli ne peuvent s'écrire selon la formulation complexe des quaternions (relation 4.5).

En revanche les matrices Π_1 , Π_2 et Π_3 représentent des quaternions :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= j\sigma_1 = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} = -K \\ \Pi_2 &= j\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} = J \\ \Pi_3 &= k\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -I\end{aligned}$$

Il y a donc isomorphisme entre ces deux représentations. Donc on trouve un isomorphisme entre les quaternions vectoriels et le groupe spécial unitaire $SU(2)$.

Description des rotations par les quaternions

Un résultat très utile est qu'une rotation se formalise par un quaternion.

Dans le cadre classique, une rotation d'angle θ d'axe \vec{n} change un vecteur \vec{v} en un autre vecteur \vec{v}' selon la formule de Rodrigues :

$$\vec{v}' = \vec{v} + \sin\theta \vec{n} \wedge \vec{v} + (1 - \cos\theta)\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{v})$$

La combinaison de deux rotations n'est alors pas très simple.

Or on montre que le quaternion décrivant cette rotation s'écrit :

$$\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(n_x I + n_y J + n_z K)$$

Combiner deux rotations revient à effectuer le produit de deux quaternions.

On peut analyser plus précisément l'allure des quaternions selon l'axe de rotation :

– Pour une rotation selon l'axe Ox , on a $n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0$, le quaternion s'écrit

$$\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}I \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

– Pour une rotation selon l'axe Oy , on a $n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0$

$$\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}J \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & j\sin\frac{\theta}{2} \\ j\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

– Pour une rotation selon l'axe Oz , on a $n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1$

$$\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}K \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - j\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

4.2 Description des ondes totalement polarisées

4.2.1 Représentation par le vecteur de Jones

Définition

Le champ électrique \vec{E}_R , grandeur réelle, s'écrit :

$$\vec{E}_R = \text{Re}(\vec{E}_C) = \text{Re}(e^{i\alpha} \vec{P}) \quad (4.9)$$

\vec{P} étant une représentation réduite de ce champ électrique ne dépendant pas de la phase absolue :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} |E_x| \\ |E_y| e^{j\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{j\delta} \end{pmatrix}$$

\vec{P} est le vecteur de Jones : il a deux composantes **complexes** et, à ce titre, véhicule plus d'information qu'un vecteur réel. Il est décrit ici par un triplet de réels : (a_x, a_y, δ) .

Le vecteur de Jones ne dépend pas du temps et de l'espace : aussi il faut insister sur le fait qu'il ne permet pas de connaître la direction de polarisation, puisque celle-ci est liée au vecteur d'onde \vec{k} .

Dans la base de polarisation, le vecteur de Jones \vec{P}_p a une expression assez simple puisque, par définition de cette base, $\delta = \pi/2$:

$$\vec{P}_p = \begin{pmatrix} |E_x| \\ |E_y| e^{j\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ jb \end{pmatrix}$$

qui peut se réécrire en utilisant l'angle d'ouverture η et A :

$$\vec{P}_p = A \begin{pmatrix} \cos(\eta) \\ j \sin(\eta) \end{pmatrix}$$

On en déduit une autre formulation du vecteur de Jones :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \vec{P}_p$$

soit :

$$\vec{P} = A \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta \\ j \sin \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{j\delta} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

On comprend mieux pourquoi A est un invariant de l'ellipse ($A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$).

Le vecteur de Jones et les changements de base d'état de polarisation

Il est souvent d'usage de réécrire un vecteur complexe sous la forme d'un produit d'une matrice complexe et d'un vecteur réel :

$$\begin{pmatrix} \cos \eta \\ j \sin \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & j \sin \eta \\ j \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En posant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_x$, l'expression 4.10 s'écrit alors :

$$\vec{P} = A \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & j \sin \eta \\ j \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \vec{u}_x$$

et en réintroduisant la phase absolue $\alpha = -\phi(t, z)$ l'expression 4.9 du champ s'écrit :

$$\vec{E}_C = A \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & j \sin \eta \\ j \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha} \end{pmatrix} \vec{u}_x \quad (4.11)$$

On reconnaît les trois opérateurs spéciaux unitaires U_Ψ , U_η et U_α :

$$\begin{aligned} U_\Psi &= \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \\ U_\eta &= \begin{pmatrix} \cos \eta & j \sin \eta \\ j \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \\ U_\alpha &= \begin{pmatrix} e^{-j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui appartiennent au groupe spécial unitaire $SU(2)$.

On reconnaît aussi les trois rotations élémentaires exprimées en tant que quaternion (relations 4.6, 4.7 et 4.8). Ces trois opérateurs sont liés chacun à un des descripteur du phénomène de polarisation :

- L'opérateur spécial unitaire U_Ψ correspond à une rotation d'angle Ψ (orientation de l'ellipse)
- L'opérateur spécial unitaire U_η correspond à une transformation elliptique d'angle η (ouverture de l'ellipse),
- L'opérateur spécial unitaire U_α correspond à un déphasage complexe de valeur α (phase absolue).

Sous sa forme la plus générale, on a donc le schéma permettant de passer d'une représentation où la polarisation est linéaire à une représentation quelconque, définie par le triplet de réels (α, η, Ψ) :

$$\vec{E}_C = U_\Psi U_\eta U_\alpha \vec{u}_x \quad (4.12)$$

La transformation d'une base A (où le champ se définit par le triplet α_A, η_A, Ψ_A) à une base B où le champ se définit par le triplet α_B, η_B, Ψ_B) s'exprime par l'opérateur spécial unitaire suivant :

$$U_{\Psi_B} U_{\eta_B} U_{\alpha_B} U_{-\alpha_A} U_{-\eta_A} U_{-\Psi_A}$$

4.2.2 Représentation par le vecteur de Stokes

Sphère de Poincaré

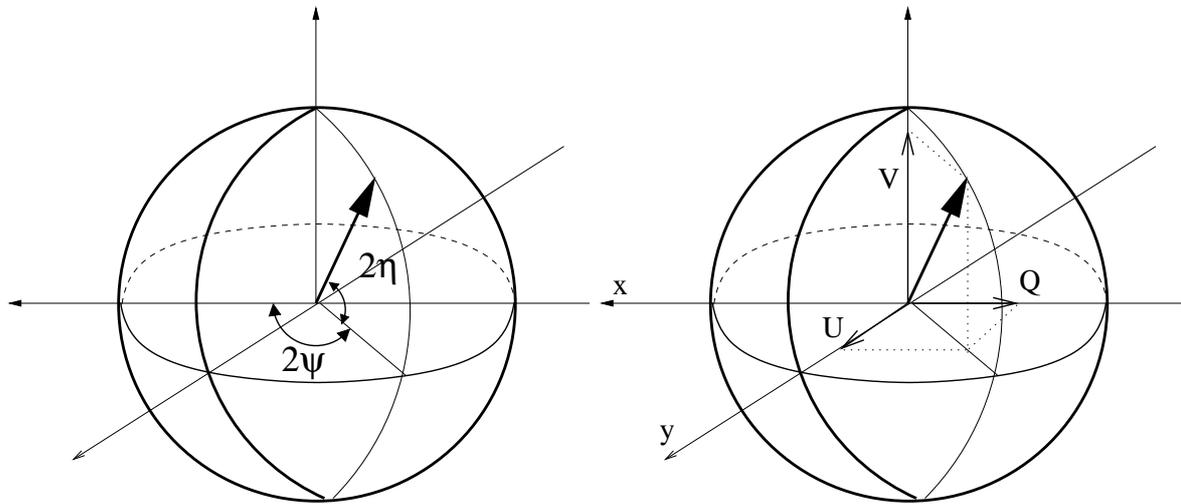


FIG. 4.6 – La sphère de Poincaré et le vecteur de Stokes

Proposée par Poincaré en 1892, cette représentation consiste en un triplet de réels (I, Ψ, η) :

- I est l'intensité $I = A^2 = a_x^2 + a_y^2$,
- Ψ est l'orientation (angle entre le référentiel observateur et la base de polarisation),
- η est l'ellipticité (angle d'ouverture de l'ellipse).

Ce triplet se représente par un point sur une sphère de rayon I , dont la longitude est donné par 2Ψ et la latitude 2η . Le plan équatorial correspond à une polarisation linéaire (cas particulier $\delta = 0$), et les pôles à des polarisations circulaires (cas particuliers $\delta = -\frac{\pi}{2}$ et $\delta = \frac{\pi}{2}$).

A un point d'un cercle de latitude donnée correspond alors une ellipse d'ouverture fixée par la latitude, mais dont l'orientation dépend de la longitude, comme l'illustre la figure 4.7

Cette représentation effectue certaines hypothèses par rapport au cas général :

- $\eta \in [\pi/4; \pi/4]$: ce qui revient à choisir les ellipses dans la base de polarisation telles que $b \leq a$,
- $\Psi \in [\pi/4; \pi/4]$: ce qui revient à choisir les ellipses dans le référentiel observateur telles que $a_y \leq a_x$.

Ces restrictions n'auront aucune conséquence sur la généralité des résultats.

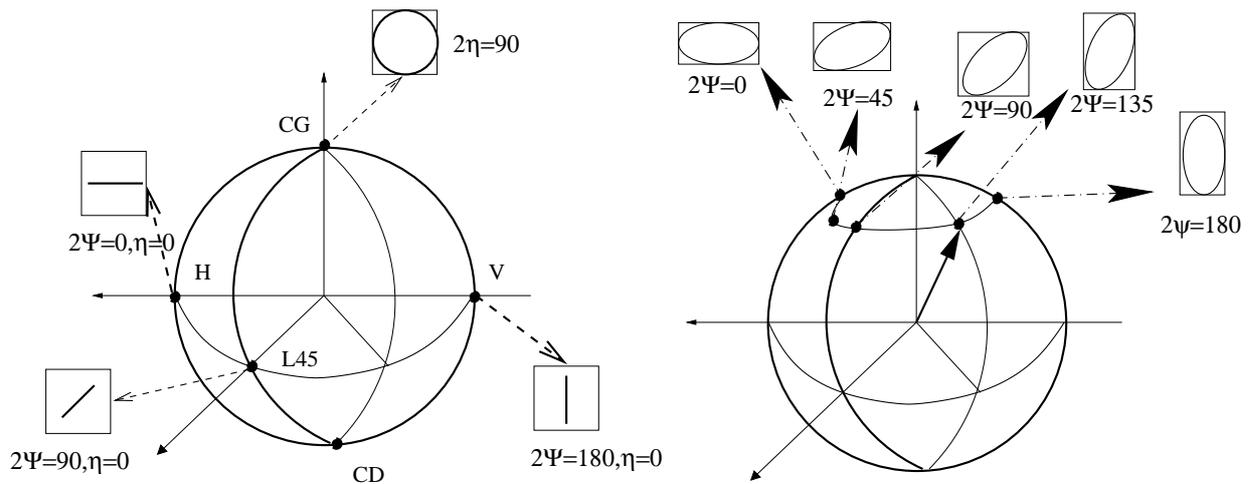


FIG. 4.7 – La sphère de Poincaré : allures d'une ellipse donnée en fonction de l'orientation du référentiel de l'observateur. H représente une polarisation rectiligne selon Ox, L45 représente une polarisation rectiligne à 45°, V représente une polarisation verticale, CG représente une polarisation circulaire gauche, CD représente une polarisation circulaire droite.

Paramètres et Vecteur de Stokes

En prenant les coordonnées cartésiennes sur la sphère de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned} Q &= I \cos 2\eta \cos 2\Psi \\ U &= I \cos 2\eta \sin 2\Psi \\ V &= I \sin 2\eta \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le quadruplet composé des quatre réels (I, Q, U, V) représente les paramètres de Stokes (proposé en 1852), liés par la relation

$$I = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$$

et c'est ce vecteur que Muller, en 1948, propose d'utiliser pour caractériser la polarisation d'un faisceau lumineux.

Le vecteur de Stokes s'exprime donc en fonction du triplet (Ψ, η, A) :

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 \\ A^2 \cos 2\eta \cos 2\Psi \\ A^2 \cos 2\eta \sin 2\Psi \\ A^2 \sin 2\eta \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Il s'exprime aussi en fonction de a_x, a_y et δ (voir les relations 4.3 et 4.4), c'est à dire en fonction des paramètres du vecteur de Jones :

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ a_x^2 - a_y^2 \\ 2 a_x a_y \cos(\delta) \\ 2 a_x a_y \sin(\delta) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ 2 \Re(E_x \cdot E_y^*) \\ 2 \Im(E_x \cdot E_y^*) \end{pmatrix}$$

Dans ce formalisme, les cas particuliers les plus courants sont repris dans le tableau 4.1

Le coefficient de polarisation P s'exprime en fonction des paramètres de Stokes et s'écrit :

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}$$

Dans le cadre présenté dans ce paragraphe, on a bien évidemment

$$P = 1$$

mais nous verrons que, dans le cadre de la diffusion dans un milieu de type ergodique, cette valeur est comprise entre 0 (dépolérisation totale par le milieu) et 1 (aucune dépolérisation).

Si l'on analyse les effets d'une rotation d'angle ζ (selon l'axe donné par le vecteur d'onde) sur le vecteur de Stokes, on peut tout d'abord constater que les composantes I et V restent inchangées. Les relations liant alors les nouvelles valeurs Q' et U' à Q et U sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\zeta) & \sin(2\zeta) & 0 \\ 0 & -\sin(2\zeta) & \cos(2\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

Paramètres de Stokes modifiés

On utilise parfois le vecteur de Stokes modifié :

$$\begin{pmatrix} |E_x|^2 \\ |E_y|^2 \\ 2 \Re(E_x \cdot E_y^*) \\ 2 \Im(E_x \cdot E_y^*) \end{pmatrix}$$

Stokes	Jones	Ψ	η		
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	0	0	onde polarisée rectilignement suivant l'axe Ox	H
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\pi/2$	0	onde polarisée rectilignement suivant l'axe Oy	V
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\pi/4$	0	onde polarisée rectilignement à 45°	L45
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$	indéfini	$\pi/4$	onde polarisée circulairement gauche	CG
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$	indéfini	$-\pi/4$	onde polarisée circulairement droite	CD

Tab. 4.1 – Expression des vecteurs de Stokes (coefficients réels) et des vecteurs de Jones (coefficients complexes) pour diverses polarisations courantes.

4.3 Description des ondes partiellement polarisées

La propagation d'une onde polarisée dans un milieu quelconque peut provoquer un phénomène spécifique : un changement de l'état de polarisation, voire la dépolarisation totale de l'onde.

Un exemple de ce phénomène peut s'observer en optique avec les cristaux biréfringents (comme le spath d'Islande) pour lesquels la vitesse de propagation est différente selon la direction. Pour une fréquence donnée, la longueur d'onde est alors différente et le terme de déphasage entre les deux directions varie le long de l'axe de propagation. Deux cristaux d'épaisseur différente modifieront alors la polarisation de manière différente, mais déterministe.

Les ondes électromagnétiques peuvent aussi être dépolarisées, mais selon un processus différent. Par exemple, l'atmosphère entre la Terre et un satellite est un milieu dépolarisant car, entre deux instants, les perturbations, traduites par des déphasages, ne seront pas identiques selon les canaux. Dans cet exemple, la polarisation de l'onde varie avec le temps.

4.3.1 Matrice de covariance (vecteur de Jones)

Dans la mesure où l'onde reçue a été affectée par des perturbations, il est nécessaire d'en caractériser les variations temporelles (ou spatiales) en étudiant le vecteur de Jones. Il est alors judicieux de considérer la matrice de covariance \mathbf{J} du vecteur de Jones :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}$$

les espérances étant prises selon l'axe des temps (ou à partir d'échantillons pris au même instant à des points différents).

Dans le formalisme des quaternions, le vecteur de Stokes est simplement la projection de la matrice de covariance sur le groupe des matrices de Pauli :

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \text{tr}(\mathbf{J}\sigma_0) \\ \text{tr}(\mathbf{J}\sigma_1) \\ \text{tr}(\mathbf{J}\sigma_2) \\ \text{tr}(\mathbf{J}\sigma_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle \\ 2\mathfrak{X} \langle E_x E_y^* \rangle \\ 2\mathfrak{Y} \langle E_x E_y^* \rangle \end{pmatrix}$$

Notons que dans le cas où l'onde est complètement polarisée et où il n'y a pas de perturbation dans le canal de transmission, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\langle E_x E_x^* \rangle &= |E_x|^2 \\ \langle E_y E_y^* \rangle &= |E_y|^2 \\ \langle E_x E_y^* \rangle &= 0\end{aligned}$$

et on retrouve

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ 2.\Re(E_x.E_y^*) \\ 2.\Im(E_x.E_y^*) \end{pmatrix}$$

4.3.2 Vecteur de Stokes

Le principal intérêt d'utiliser le vecteur de Stokes est que deux ondes polarisées, décrites chacune par un vecteur de Stokes, et dont la polarisation est indépendante, forme une onde dont le vecteur de Stokes est simplement la somme des deux vecteurs de Stokes [2].

En effet, soit un champ somme de champs provenant de N sources différentes :

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n$$

Le premier vecteur de Stokes modifié s'exprime comme

$$I = \sum_{n=1}^N I_n + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \langle E_n E_m \rangle$$

S'il n'existe aucune corrélation entre les champs diffusés par la n -ème et la m -ème sources, on a

$$I = \sum_{n=1}^N I_n$$

L'inconvénient est que la phase absolue est perdue (seule est conservée la différence de phase δ).

4.4 Matrice de rétrodiffusion complexe

4.4.1 Matrice de Jones

Définition

Dès lors que la traversée d'un milieu peut modifier l'état de polarisation de l'onde, le formalisme des matrices de Jones peut alors être appliqué. A une onde émise $\vec{\mathbf{E}}_{in}$, correspond, pour un observateur, une onde $\vec{\mathbf{E}}_{out}$ qui peut formellement s'exprimer :

$$\vec{\mathbf{E}}_{out} = \vec{\mathbf{J}} \vec{\mathbf{E}}_{in}$$

Conventions BSA et FSA

Le repère de l'observateur peut se définir de deux manières, selon l'orientation du vecteur d'onde \vec{k} .

- \vec{k} est "naturellement" dirigé dans le sens du vecteur de propagation (représentation naturelle de l'onde rétrodiffusée). On est alors dans la convention FSA (Forward Scattering Alignment).
- \vec{k} est, au contraire, dirigé à l'opposé du vecteur d'onde. On est dans la convention BSA (Backward Scattering Alignment). L'intérêt de cette représentation est que, dans le cas monostatique, le référentiel "émetteur" et le référentiel BSA sont identiques.

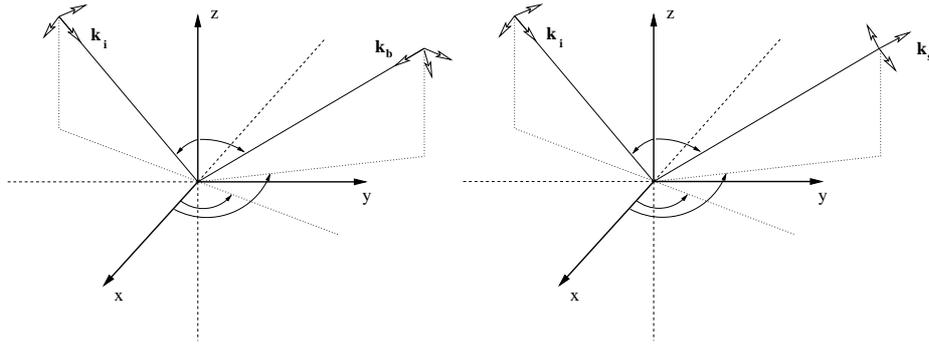


FIG. 4.8 – Conventions FSA (à droite) et BSA (à gauche). En polarimétrie, c’est la convention BSA qui est adoptée car, en bistatique le repère d’émission et celui de réception sont identiques.

4.4.2 Matrice de Sinclair (rétrodiffusion complexe), matrice de Mueller

Dans le cas d’une rétrodiffusion par une cible, l’onde réfléchie est liée à l’onde incidente par la matrice de diffusion \mathbf{S} :

$$\begin{pmatrix} E_{r,h} \\ E_{r,v} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\vec{k}\vec{d}}}{|\vec{d}|} \begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i,h} \\ E_{i,v} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\vec{k}\vec{d}}}{|\vec{d}|} \mathbf{S} \vec{E}_{in} \quad (4.16)$$

Les éléments S_{ij} de la matrice \mathbf{S} dépendent des caractéristiques de la cible, notamment géométriques (rugosité) et diélectriques (humidité), mais également de la fréquence de l’onde, de l’incidence, etc... La matrice étant complexe, il y a en pratique 7 paramètres à définir (on ignorera toujours une phase de référence).

- Les termes S_{hh} et S_{vv} sont dits “copolarisés” (copol)
- Les termes S_{hv} et S_{vh} sont dits “en polarisation croisée” (crosspol).

Le principe de réciprocité permet d’affirmer que, dans le cas monostatique :

$$S_{hv} = S_{vh}$$

Il ne reste alors que paramètres indépendants. Il faut cependant noter que cette relation n’est valable que dans le cas d’émission simultanée des ondes polarisées H et V, ce qui n’est pas le cas des radars émettant alternativement en V et en H ; cependant, même dans ce dernier cas, les données sont étalonnées de façon à vérifier $S_{hv} = S_{vh}$.

Une grandeur souvent utilisée est le span :

$$\text{span} = |S_{hh}|^2 + |S_{vv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{hv}|^2$$

On peut aussi représenter la matrice de rétrodiffusion complexe \mathbf{S} sous sa forme vectorielle $\vec{\mathbf{S}}$:

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Pour des données étalonnées (ou en monostatique), $\vec{\mathbf{S}}$ se réduit alors à 3 composantes :

$$\vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vv} \end{pmatrix}.$$

4.4.3 Modèles de cibles déterministes

Le dièdre

Un dièdre est une association de deux plans réfléchissants perpendiculaires entre eux. Ils se coupent selon une droite Δ . On sait que, par réflexion dans un miroir, un objet subit une “symétrie miroir” : si l’objet est rattaché à un référentiel $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, son miroir est décrit par $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$. En pratique, au lieu de suivre le chemin complet du rayon (trajet direct jusqu’au miroir, puis rayon réfléchi selon les lois de Snell Descartes), tout se passe comme si on voyait un objet virtuel selon un simple rayon direct, cet objet étant le symétrique miroir de l’objet initial.

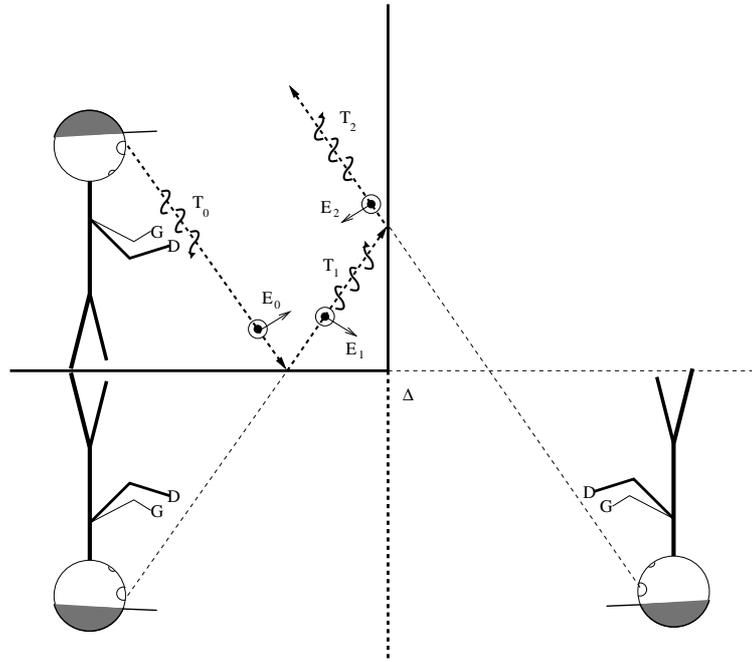


FIG. 4.9 – L’observateur se regarde dans un dièdre composé de deux miroirs, le premier à l’horizontale, le second à la verticale. Il se voit alors la tête en bas, pivoté de 180° et tournant son tire bouchon “dans le bon sens” dans son référentiel propre (convention FSA). Cependant, l’observateur note que le tire bouchon tourne dans le mauvais sens dans son propre référentiel (convention BSA). On note que $E_0 = -E_2$, et que le champ perpendiculaire à la figure est conservé.

Pris séparément, chaque miroir va imposer une orientation qu’un rayon réfléchi (qui suit les lois de Snell-Descartes) et des relations sur le champ électrique. Si on suppose le miroir métallique, aucun champ ne peut se propager dans celui-ci et le champ résultant doit toujours être parallèle à la surface réfléchissante (définie par son vecteur normal \vec{n}), ce qui donne

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

Un dièdre aura un effet différent selon l’orientation de la droite Δ . Pour en comprendre le mécanisme, nous allons étudier deux cas :

- Dans le premier cas (figure 4.4.3), un bonhomme est debout sur un des miroirs du dièdre, et la droite Δ est donc perpendiculaire à lui. Après les deux réflexions, il se verra identique à lui-même (le bras gauche effectivement à gauche de son bras droit), mais la tête en bas. Il tourne toujours son tire bouchon dans le bon sens dans son propre référentiel (convention FSA), alors qu’après une réflexion, il le tournerait dans le mauvais sens. Cependant, vu de l’observateur (convention BSA), il tourne son tire bouchon dans le mauvais sens.
- Dans le second cas (figure 4.4.3), un bonhomme est debout et sa verticale est parallèle à la droite Δ . Après les deux réflexions, il se verra identique à lui-même (le bras gauche effectivement à gauche de son bras droit) et effectivement dans la même orientation (les pieds sur la Terre). Il tourne toujours son tire bouchon dans le bon sens dans son propre référentiel (convention FSA), alors qu’après une réflexion, il le tournerait dans le mauvais sens. Cependant, vu de l’observateur (convention BSA), il tourne son tire bouchon dans le mauvais sens.

Le but de cette analyse simplifiée est de montrer que les deux cas ne sont pas identiques et que l’orientation du dièdre a un rôle à jouer.

On trouve dans la littérature la matrice de Sinclair pour le dièdre :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos 2\Psi & \sin 2\Psi \\ \sin 2\Psi & -\cos 2\Psi \end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier $\Psi = 0$ (ou $\Psi = \pi$), cette matrice s’écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cibles canoniques

Sphère, plan, trièdre	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Dipôle	$\begin{pmatrix} \cos^2 \Psi & \frac{1}{2} \sin 2\Psi \\ \frac{1}{2} \sin 2\Psi & \sin^2 \Psi \end{pmatrix}$
Dièdre	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos 2\Psi & \sin 2\Psi \\ \sin 2\Psi & -\cos 2\Psi \end{pmatrix}$
Hélice droite	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2j\Psi} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{pmatrix}$
Hélice gauche	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2j\Psi} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{pmatrix}$

4.4.4 Ondes partiellement polarisées

Pour de nombreuses applications, on s'intéresse non pas aux valeurs de ces matrices, mais à leurs propriétés moyennes. On utilise alors, de préférence à \mathbf{S} , l'une ou l'autre des deux matrices :

- la matrice de covariance \mathbf{C} , complexe et hermitienne (cas monostatique) :

$$\mathbf{C} = \vec{\mathbf{S}}^* \cdot \vec{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} |S_{hh}|^2 & S_{hh} \cdot S_{hv}^* & S_{hh} \cdot S_{vh}^* & S_{hh} \cdot S_{vv}^* \\ S_{hv} \cdot S_{hh}^* & |S_{hv}|^2 & S_{hv} \cdot S_{vh}^* & S_{hv} \cdot S_{vv}^* \\ S_{vh} \cdot S_{hh}^* & S_{vh} \cdot S_{hv}^* & |S_{vh}|^2 & S_{vh} \cdot S_{vv}^* \\ S_{vv} \cdot S_{hh}^* & S_{vv} \cdot S_{hv}^* & S_{vv} \cdot S_{vh}^* & |S_{vv}|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Sous l'hypothèse de réciprocité, \mathbf{C} se réduit à une matrice 3×3 :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} |S_{hh}|^2 & S_{hh} \cdot S_{hv}^* & S_{hh} \cdot S_{vv}^* \\ S_{hv} \cdot S_{hh}^* & |S_{hv}|^2 & S_{hv} \cdot S_{vv}^* \\ S_{vv} \cdot S_{hh}^* & S_{vv} \cdot S_{hv}^* & |S_{vv}|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

que l'on peut aussi appeler matrice de cohérence polarimétrique.

- la matrice de Stokes ou de Mueller \mathbf{M} , qui, dans le cas monostatique, est symétrique et s'écrit en fonction des coefficients de la matrice de diffusion \mathbf{S} :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 + |S_{vv}|^2 + 2|S_{hv}|^2) & \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 - |S_{vv}|^2) & \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) + \frac{1}{2}\Re(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) + \frac{1}{2}\Im(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) \\ \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 - |S_{vv}|^2) & \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 + |S_{vv}|^2 - 2|S_{hv}|^2) & \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) - \frac{1}{2}\Re(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) - \frac{1}{2}\Im(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) \\ \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) + \frac{1}{2}\Re(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) - \frac{1}{2}\Re(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}|S_{hv}|^2 + \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) \\ \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) + \frac{1}{2}\Im(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) - \frac{1}{2}\Im(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) & \frac{1}{2}|S_{hv}|^2 - \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

et est reliée à \mathbf{S} par :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 + |S_{vv}|^2 + 2|S_{hv}|^2) \\ M_{12} &= \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 - |S_{vv}|^2) \\ M_{13} &= \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) + \frac{1}{2}\Re(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) \\ M_{14} &= \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) + \frac{1}{2}\Im(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) \\ M_{22} &= \frac{1}{4}(|S_{hh}|^2 + |S_{vv}|^2 - 2|S_{hv}|^2) \\ M_{23} &= \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) - \frac{1}{2}\Re(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) \\ M_{24} &= \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{hv}^*) - \frac{1}{2}\Im(S_{hv} \cdot S_{vv}^*) \\ M_{33} &= \frac{1}{2}|S_{hv}|^2 + \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) \\ M_{34} &= \frac{1}{2}\Im(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) \\ M_{44} &= \frac{1}{2}|S_{hv}|^2 - \frac{1}{2}\Re(S_{hh} \cdot S_{vv}^*) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans le cas de cibles ponctuelles et dans le cas d'un radar monostatique, il existe cinq relations liant les termes de \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} M_{11} &= M_{22} + M_{33} + M_{44} \\ M_{13} \cdot M_{23} + M_{14} \cdot M_{24} &= M_{11} \cdot M_{12} - M_{12} \cdot M_{22} \\ M_{13} \cdot M_{14} - M_{23} \cdot M_{24} &= M_{33} \cdot M_{34} - M_{34} \cdot M_{44} \\ M_{13}^2 + M_{23}^2 - M_{14}^2 + M_{24}^2 &= M_{11}^2 - M_{22}^2 \\ M_{13}^2 - M_{23}^2 - M_{14}^2 + M_{24}^2 &= M_{33}^2 - M_{44}^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

– la matrice de Mueller est parfois définie à partir du vecteur de Stokes modifié, désignée par \mathbf{M}_m , et qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} |S_{hh}|^2 & |S_{hv}|^2 & \Re(S_{hh}S_{hv}^*) & -\Im(S_{hh}S_{hv}^*) \\ |S_{vh}|^2 & |S_{vv}|^2 & \Re(S_{vh}S_{vv}^*) & -\Im(S_{vh}S_{vv}^*) \\ 2\Re(S_{hh}S_{vh}^*) & 2\Re(S_{hv}S_{vv}^*) & \Re(S_{hh}S_{vv}^* + S_{hv}S_{vh}^*) & -\Im(S_{hh}S_{vv}^* + S_{hv}S_{vh}^*) \\ 2\Im(S_{hh}S_{vh}^*) & 2\Im(S_{hv}S_{vv}^*) & \Im(S_{hh}S_{vv}^* + S_{hv}S_{vh}^*) & \Re(S_{hh}S_{vv}^* + S_{hv}S_{vh}^*) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Contrairement à la matrice de Mueller habituelle, cette matrice n'est pas symétrique.

– la matrice de cohérence polarimétrique \mathbf{T} , définie en général sous les hypothèses de réciprocité, et qui s'écrit :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |S_{hh} + S_{vv}|^2 & (S_{hh} + S_{vv})(S_{hh} - S_{vv})^* & 2(S_{hh} + S_{vv})S_{hv}^* \\ (S_{hh} + S_{vv})^*(S_{hh} - S_{vv}) & |S_{hh} - S_{vv}|^2 & 2(S_{hh} - S_{vv})S_{hv}^* \\ 2(S_{hh} + S_{vv})^*S_{hv} & 2(S_{hh} - S_{vv})^*S_{hv} & 4S_{hv}S_{hv}^* \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

4.5 Utilisation des matrices de covariance et de cohérence

4.5.1 Matrice de variance-covariance

Le calcul de grandeurs de la matrice de variance-covariance doit en fait être prise dans un sens statistiques en ce sens que les grandeurs doivent être calculées dans un voisinage du point considéré. De même pour la matrice de rétrodiffusion complexe.

On peut alors envisager de diagonaliser la matrice de rétrodiffusion complexe et de considérer les valeurs propres λ_1 et λ_2 (en faisant l'hypothèse $\lambda_1 \geq \lambda_2$).

La grandeur dite de "degré de polarisation" P peut alors être calculée :

$$P = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

4.5.2 Matrice de cohérence : méthode H- α

On peut aussi diagonaliser la matrice de cohérence polarimétrique \mathbf{T} (équation 4.24) et récupérer ainsi

- les trois valeurs propres : μ_1, μ_2 et μ_3 ,
- les trois vecteurs propres : \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 , que l'on peut toujours exprimer sous la forme suivante

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \beta_i e^{i\delta} \\ \sin \alpha_i \sin \beta_i e^{i\gamma} \end{pmatrix}$$

Cloude et Pottier [3] proposent de calculer les deux grandeurs suivantes :

– H , l'entropie de diffusion

$$H = \sum_{i=1}^3 P_i \log_3(P_i) : \quad P_i = \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^3 \mu_j}$$

– un coefficient α qui est une sorte d'angle moyen obtenu à partir des orientations des vecteurs propres

Dans le diagramme H, α , on peut alors caractériser un certain nombre de cibles (forêt, zones urbaines, ...). Sur ce diagramme, les deux courbes donnent pour chaque valeur de l'entropie les bornes minimales et maximales pour $\bar{\alpha}$.

- les zones de diffusion de faible entropie pour lesquelles un seul mécanisme de diffusion prédomine :
 - **Z9** : $\bar{\alpha}$ est inférieur à $\frac{\pi}{4}$, ce qui correspond à une simple diffusion par une surface (sans mécanisme introduisant une rotation de phase de π entre hh et vv). En pratique, tous les mécanismes décrit par un nombre impair de diffusions appartiennent à cette classe.
 - **Z7** : $\bar{\alpha}$ est supérieur à $\frac{\pi}{4}$ et inférieur à $\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à une diffusion double. En pratique, tous les mécanismes décrit par un nombre pair de diffusions appartiennent à cette classe.
 - **Z8** : $\bar{\alpha}$ est proche de $\frac{\pi}{4}$, le mécanisme proposé est une diffusion par des dipôles.
- les zones de diffusion de moyenne entropie (entre 0.5 et 0.9)

- **Z6** : $\bar{\alpha}$ est faible, on a un mécanisme de diffusion simple avec des effets liés à la rugosité de la surface.
- **Z4** : $\bar{\alpha}$ est proche de $\frac{\pi}{2}$, on a des effets de diffusion multiple (par exemple, diffusion volumique dans la canopée).
- **Z5** : $\bar{\alpha}$ est proche de $\frac{\pi}{4}$, ce qui peut s'expliquer par une certaine corrélation entre l'orientation des diffuseurs.
- les zones de diffusion de forte entropie
 - **Z3** : $\bar{\alpha}$ est faible, cette zone, qui correspond à des valeurs de $\bar{\alpha}$ supérieures à la borne supérieure, ne peut se caractériser par cette approche.
 - **Z1** : cette zone correspond à des diffusion multiples, telles que l'on peut les observer en applications forestières.
 - **Z2** : cette zone correspond donc à de la diffusion volumique par un nuage de particules de type aiguille (sans corrélation de direction). Notons qu'un bruit aléatoire, sans effet de polarisation, est représenté dans les valeurs les plus à droite de cette zone.

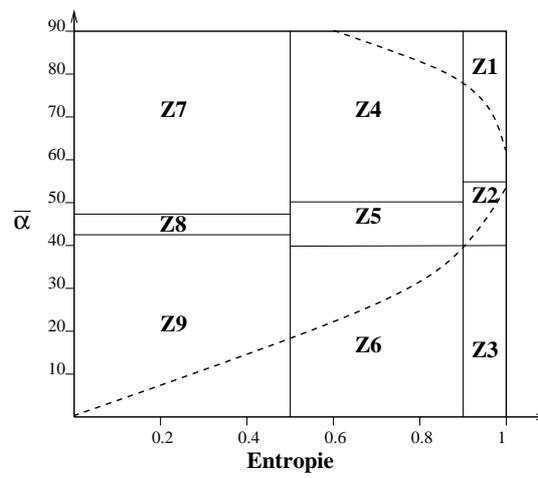


FIG. 4.11 – Diagramme des 9 zones caractéristiques du diagramme "alpha-H".

Annexe A

Les images et leurs caractéristiques



Les images RSO fournies par une agence spatiale possèdent un certain nombre de caractéristiques qu'il est toujours important de connaître avant tout traitement.

A.1 Types de données

Il y a plusieurs niveaux de traitement des données. Bien évidemment, les appellations changent d'une agence spatiale à une autre. Dans ce document, nous avons adopté les notations suivantes :

- **Données RAW** ou données brutes : elles correspondent aux signaux acquis par l'antenne physique. Les données sont souvent en *signed bytes*. A priori, aucun prétraitement n'est effectué sur ces données dont la résolution est kilométrique. Certaines agences (comme le DLR) ne fournissent pas ce type de données, qui requièrent, pour pouvoir être exploitées, un outil de synthèse RSO.
- **Données SLC** ou *Single Look Complex* : ce type de données est le résultat de la synthèse RSO. Les pixels sont souvent des *signed short*. Le pas interpixellique le long de la fauchée est dicté par la fréquence d'échantillonnage. Dans la direction de l'azimut, c'est la FRI qui donne le pas interpixellique. L'ASI (données CSK) propose des options ("balanced" et "unbalanced") qui introduisent ou non des apodisations en distance et en azimut. En général, les données sont apodisées.
- **Données PRI** ou *PRÉcision Images* : ce sont des données multivues pour lesquelles l'opération de multivue conduit à un pixel dont les dimensions au sol sont fixes. Dans le cas des données ESA (ERS, ENVISAT), le pixel PRI est de 12,5m x 12,5m (Radarsat propose aussi pour les modes fins du 6,25m x 6,25 m).
- **Données GEC** géocodées. Les pixels correspondent alors à une position sur la surface de la Terre. Un MNT est requis pour pouvoir effectuer toutes les corrections requises, ainsi que la meilleure trajectographie possible pour le satellite.

A.2 Apodisation

En théorie, la PSF d'une image RSO dépend de la bande passante du *chirp* (le long de la fauchée) et de la dimension de l'antenne synthétique (en azimut) et s'écrit (relation 1.23) :

$$\tilde{U}(x, y) \sim \text{Sinc}(\pi\tilde{B}_x x) \text{Sinc}(\pi\tilde{B}_y y) \quad \tilde{B}_x = \frac{1}{\delta_x} = \frac{2B}{c} \quad \tilde{B}_y = \frac{1}{\delta_y} = \frac{2}{L}$$

Ce produit de deux fonctions "Sinus cardinal" hérite donc des artefacts des sinus cardinaux, en particulier la présence d'un lobe secondaire à -13 dB, qui peut s'avérer très pénalisant. Aussi pour éliminer tout ou partie de ces artefacts, un filtrage spécifique peut être appliqué dans les deux directions : c'est ce que l'on appelle apodisation.

Parmi les fenêtres de pondération possibles, le modèle le plus employé en imagerie RSO est celui des cosinus sur piédestal. Ce type de fenêtre associe linéairement dans le plan de Fourier deux fenêtres faciles à utiliser, définies ici sur une seule dimension (et nulles en dehors des domaines définis) :

- la fenêtre naturelle sur $[-F_x, F_x]$, notée $\hat{\Pi}(f_x)$:

$$\hat{\Pi}(f_x) = 1 \quad \forall f_x \in [-F_x, F_x]$$

- une fonction périodique de période égale à la dimension du support fréquentiel. Pour garantir la positivité de cette fenêtre, on rajoute une constante. On a alors la fonction $\widehat{CP}(f_x, f_y)$ définie sur $[-F_x, F_x]$ telle que :

$$\widehat{CP}(f_x) = 1 + \cos\left(\pi \frac{f_x}{F_x}\right)$$

Ces deux définitions permettent d'obtenir la même relation de normalisation pour ces deux fenêtres :

$$\int_{-F_x}^{F_x} \hat{\Pi}(f_x) df_x = \int_{-F_x}^{F_x} \widehat{CP}(f_x) df_x = 1$$

et ce choix spécifique de fonctions de pondération peut s'avérer très utile lors d'une implémentation informatique.

La fenêtre "cosinus sur piédestal" peut alors s'écrire en fonction d'un paramètre α comme combinaison linéaire de ces deux fenêtres :

$$H_\alpha = (1 - \alpha)\hat{\Pi}(f_x) + \alpha\widehat{CP}(f_x)$$

avec les deux cas extrêmes :

- pour $\alpha = 0$ on retrouve la fenêtre naturelle,
- pour $\alpha = 1$ on a uniquement l'arche de cosinus comme fenêtre.

Par transformée de Fourier inverse, on a alors les réponses impulsionnelles respectives de ces deux fenêtres :

– la fenêtre naturelle $\Pi(x)$ telle que sa transformée de Fourier soit $\hat{\Pi}(f_x)$:

$$\Pi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

– l’arche de cosinus $CP(x)$ telle que sa transformée de Fourier soit la fonction périodique de type cosinus $\widehat{CP}(f_x)$:

$$CP(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\pi^2}{\pi^2 - \pi^2 x^2}$$

Le “cosinus sur piédestal” a alors comme expression dans l’espace direct :

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 - \alpha) \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \alpha \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\pi^2}{\pi^2 - \pi^2 x^2} \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \left(1 - \alpha + \alpha \frac{\pi^2}{\pi^2 - \pi^2 x^2} \right) \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \left(\frac{\pi^2 - \alpha \pi^2 x^2}{\pi^2 - \pi^2 x^2} \right) \end{aligned}$$

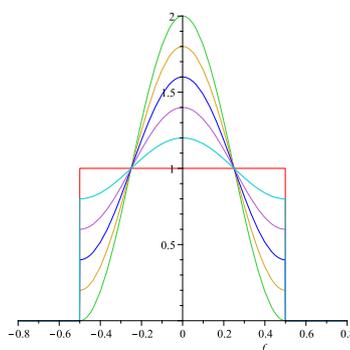


FIG. A.1 – Diverses fenêtres de pondérations : $\alpha = [0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$.

Le passage en deux dimensions s’effectue en prenant le filtre produit. Chaque dimension a alors son facteur α spécifique.

Le tableau suivant donne des exemples de valeurs que l’on peut trouver sur des images provenant de capteurs usuels :

Capteur	α_{range}	α_{azimut}
ERS	0.301	0.577
Terrasar-X	0.682	0.648
Cosmo-Skymed	0.540	0.545

La figure A.2 illustre ces valeurs sur des spectres réels.

A.3 Rééchantillonnage des données SLC

La figure A.3 montre un spectre décentré. Si l’on effectue un suréchantillonnage par zéro padding sur ce type de données, on aura alors un spectre qui n’aura pas de sens, avec des discontinuités non réelles (figure A.4 au centre). En fait, pour effectuer correctement un rééchantillonnage, il faut centrer le spectre (décalage initial du mode à la fréquence nulle), effectuer le zéro-padding, puis décaler le spectre de sa valeur initiale pour mettre son mode à la valeur initiale.

A.4 Orientation

A.4.1 Orientation de la trace

Par soucis de simplification, nous allons uniquement considérer la trace du satellite dans le cas où l’orbite est strictement circulaire,

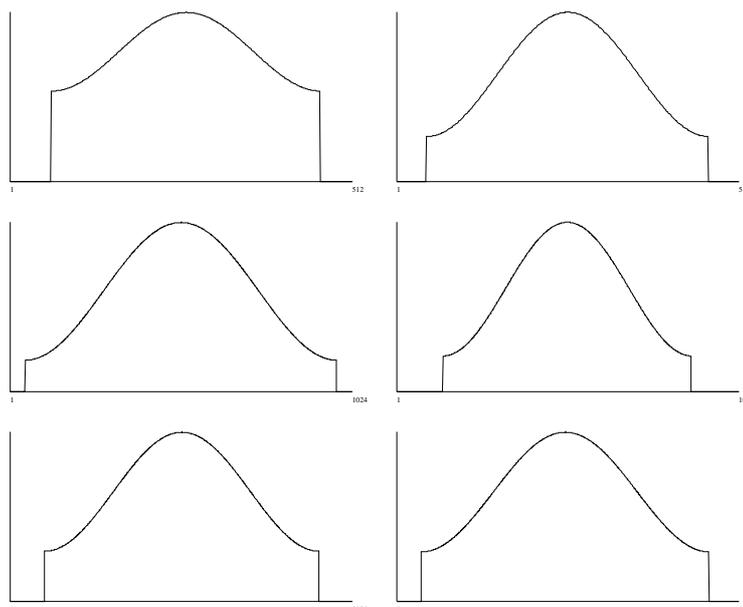


FIG. A.2 – Première ligne Cas ERS : fenêtre de pondération en range (à gauche, $\alpha = 0.301$) et en azimut (à droite, $\alpha = 0.577$). Seconde ligne Cas Terrasar-X : fenêtre de pondération en range (à gauche, $\alpha = 0.682$) et en azimut (à droite, $\alpha = 0.648$). Troisième ligne Cas Cosmo-Skymed : fenêtre de pondération en range (à gauche, $\alpha = 0.540$) et en azimut (à droite, $\alpha = 0.545$).

En utilisant les formules de trigonométrie sphérique, et en se plaçant dans le triangle sphérique formé par le nœud ascendant (pour lequel on connaît l'angle, qui est égal à l'inclinaison de l'orbite), le point considéré (pour lequel on connaît la latitude) et la projection de ce point sur l'équateur (voir figure A.5), on est alors dans une configuration "classique" de trigonométrie sphérique et on peut écrire :

$$\zeta = \text{Asin}\left(\frac{\cos i}{\cos \Psi}\right) \quad (\text{A.1})$$

Cette relation n'est bien entendu valable que si $i \geq \Psi$ ou $i \leq -\Psi$: le point doit être effectivement survolé par le satellite.

Le tableau suivant donne, pour plusieurs satellites "classiques", des valeurs d'angles entre la trace et le Nord géographique pour quelques latitudes de l'hémisphère Nord et pour des passes ascendantes.

Satellite	inclinaison	Latitude		
		$\Psi = 0^\circ$	$\Psi = 30^\circ$	$\Psi = 60^\circ$
SRTM	57°	33°	39°	
ERS	$98,5^\circ$	$-8,50^\circ$	$-9,83^\circ$	$-17,19^\circ$
TSX	$97,44^\circ$	$-7,44^\circ$	$8,59^\circ$	$-15,00^\circ$
CSK	$97,8^\circ$	$-7,80^\circ$	$-9,01^\circ$	$-15,75^\circ$

Il suffit de prendre la valeur symétrique pour les passes descendantes

A.4.2 Orientation de la fauchée

Les capteurs RSO historiques (SEASAT, ERS, Radarsat-1) visent "à droite" : la raison est qu'une visée à droite permet d'observer tout ou partie de l'océan arctique. Ce choix se fait au détriment du continent antarctique puis celui-ci ne peut être normalement observé par ces satellites (excepté lors d'expérimentations spécifiques : ce fut le cas de Radarsat-1 entre le 12/09/1997 et le 4/11/1997, avec les problèmes que l'on sait).

Ce n'est que récemment que cette contrainte a été levée et Radarsat-2 (avec son antenne visant au Nadir), CSK et TSX (par basculement prévu de la plateforme) permettent des visées gauche dans les mêmes conditions que les visées droite.

Les images fournies par les agences spatiales gardent en mémoire le mode d'acquisition. En effet :

- Chaque ligne est fournie comme une ligne temporelle : le premier pixel d'une ligne est alors le point le plus proche du satellite, le dernier, le plus éloigné du satellite.

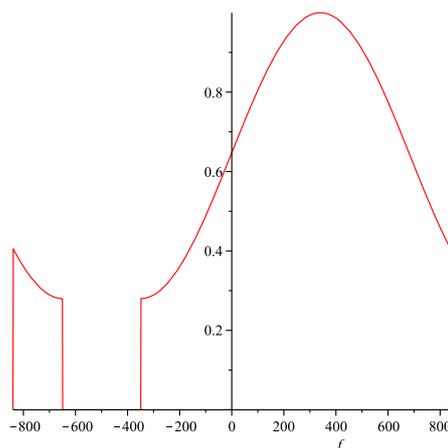


FIG. A.3 – Apodisation dans la direction azimut : cas d'ERS, dépointage d'antenne correspondant à un doppler centré de -340 Hz.

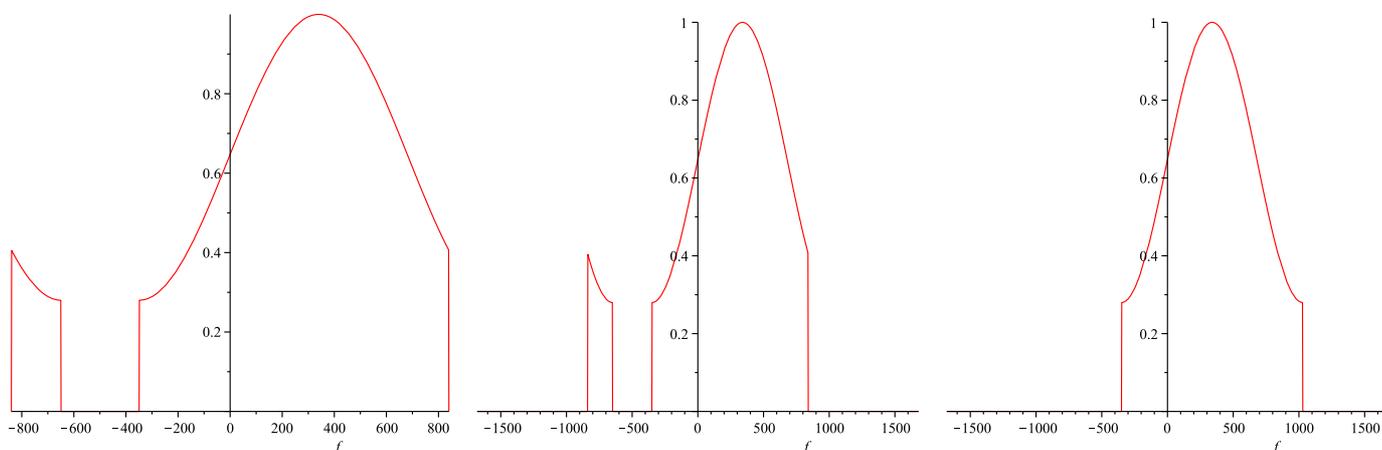


FIG. A.4 – A gauche : spectre initial correspondant à un doppler centré de -340 Hz. Au centre, zéro-padding effectué sans précaution. A droite, zéro padding effectué après recentrage, puis repositionnement du mode à la fréquence initiale.

- Les lignes sont fournies selon la chronologie de leurs acquisitions.

Ce principe est très logique et permet sans ambiguïté d'interpréter les images (RAW, SLC et PRI). Cependant si l'on veut comparer les données avec une vérité terrain (carte, MNT, images optiques, ...), il faut opérer sur ces données des symétries diverses. En effet, dans l'hémisphère Nord (le seul cas traité dans ce document !!) une carte est orientée de sorte que l'axe vertical (de bas en haut sur la feuille) soit dirigé vers le Nord et que l'axe horizontal (de gauche à droite sur la feuille) soit dirigé vers l'Est. Une analyse rapide des exemples des figures A.6 et A.7 permet de définir ces opérations :

- **Visée à droite** (figure A.6) :
 - Passe ascendante : inverser l'ordre des lignes puisque la dernière acquisition est celle qui est le plus au Nord. En revanche, laisser chaque ligne à l'identique puisque le point le plus éloigné de la trace est bien celui qui est le plus à l'Est.
 - Passe descendante : laisser l'ordre des lignes puisque la première acquisition est celle qui est le plus au Nord. En revanche, inverser l'ordre des pixels sur chaque ligne puisque le premier pixel acquis est celui qui est le plus à l'Est.
- **Visée à gauche** (figure A.7) :
 - Passe ascendante : inverser l'ordre des lignes puisque la dernière acquisition est celle qui est le plus au Nord. Inverser aussi l'ordre des pixels sur chaque ligne puisque le premier pixel acquis est celui qui est le plus à l'Est.
 - Passe descendante : ne rien changer tant en ligne qu'en colonne puisque la première acquisition est celle qui est le plus au Nord, et puisque, pour chaque ligne, le premier pixel est celui qui est le plus à l'Ouest.

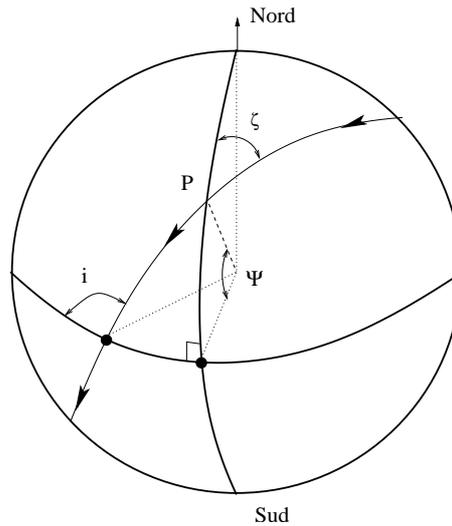


FIG. A.5 – Calcul de l'orientation de la trace par rapport à un méridien au point P.



FIG. A.6 – Capteur RSO visant à droite. Passe descendante (à gauche) et passe montante (à droite).

A.5 Les effets de la rotondité de la Terre

Les capteurs satellitaires RSO ont leur géométrie d'acquisition modifiée par la rotondité de la Terre : si l'on repère l'angle α que fait la direction de l'onde émise avec la verticale, cet angle est différent de l'incidence locale θ et cette différence varie le long de la fauchée.

A.5.1 Hypothèse de sol sphérique

Incidence au sol

Dans le cas de la Terre (ou de tout autre planète à peu près sphérique) en se plaçant au centre de la terre, on peut définir le point visé par l'angle ϕ formé par la direction du satellite et la direction du point au sol. La visée depuis le satellite se fait avec un angle α , l'angle d'incidence au point visé est θ et d est la distance entre le capteur et le point visé. Sous l'hypothèse d'une terre parfaitement sphérique, et en utilisant la relation liant les angles et les cotés dans un triangle :

$$\frac{\sin(\widehat{ABC})}{AC} = \frac{\sin(\widehat{BCA})}{BA} = \frac{\sin(\widehat{CAB})}{BC}$$

on peut écrire :

$$\frac{\sin \alpha}{R_T} = \frac{\sin \theta}{R_T + h} = \frac{\sin \phi}{d}$$

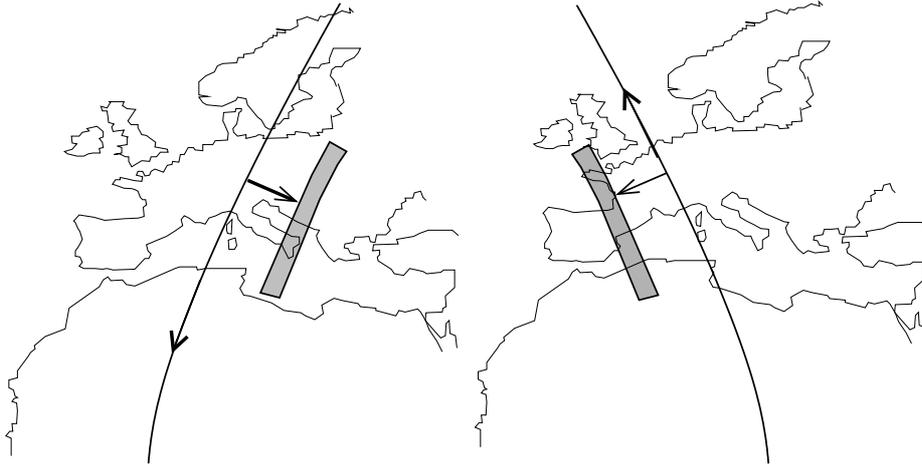


FIG. A.7 – Capteur RSO visant à gauche. Passe descendante (à gauche) et passe montante (à droite).

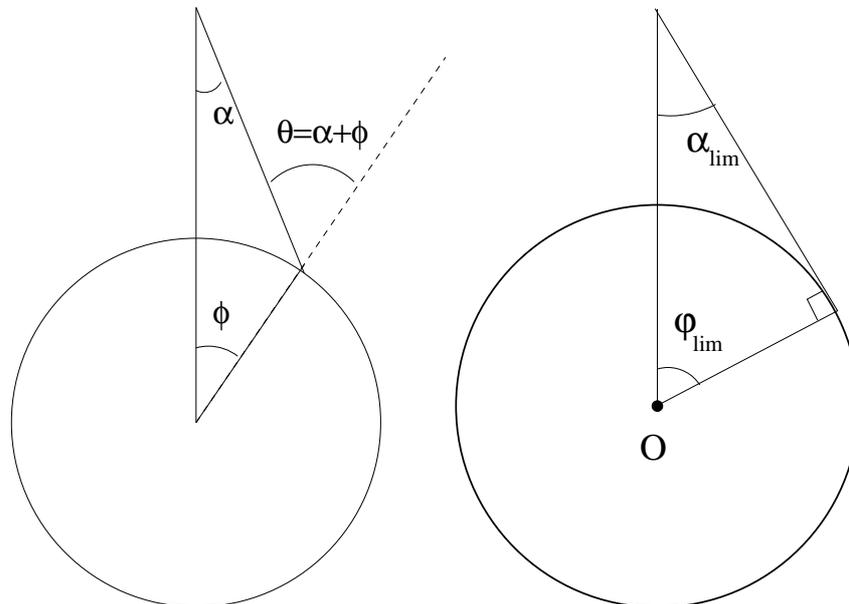


FIG. A.8 – Hypothèse de sol sphérique. θ est l'angle d'incidence que l'on observe au sol. A droite, le cas extrême où l'incidence locale est égale à $\pi/2$.

avec R_T le rayon de la Terre, qui sera considéré comme constant en première approximation. On montre alors aisément les relations (voir figure A.8) :

$$\phi = \text{Asin}\left(\frac{(R_T + h) \sin \alpha}{R_T}\right) - \alpha \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha = \text{Atan}\left(\frac{R_T \sin \phi}{R_T + h - R_T \cos \phi}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha = \text{Asin}\left(\frac{R_T \sin(\alpha + \phi)}{R_T + h}\right) = \text{Asin}\left(\frac{R_T \sin(\theta)}{R_T + h}\right) \quad (\text{A.4})$$

$$\phi = \theta - \alpha = \theta - \text{Asin}\left(\frac{R_T \sin \theta}{R_T + h}\right) \quad (\text{A.5})$$

L'expression A.4 donne donc l'angle d'émission α en fonction de l'angle d'incidence au sol $\theta = \alpha + \phi$ (cela n'a de véritable intérêt que pour les programmeurs des acquisitions : l'utilisateur n'a besoin que de l'angle d'incidence au sol !!).

L'angle ϕ a une interprétation intéressante si l'on se place sur la sphère terrestre puisque la grandeur D_N :

$$D_N = R_T \phi$$

θ	$h = 400$ km	$h = 600$ km	$h = 800$ km
15	100.667	146.552	189.815
20	136.505	198.574	257.014
25	174.464	253.528	327.826
30	215.305	312.440	403.487
35	259.982	376.576	485.503
40	309.730	447.546	575.753
45	366.197	527.446	676.636

TAB. A.1 – Distance au Nadir D_N en fonction de l'angle d'incidence au sol θ et de l'altitude h du satellite.

représente la distance au nadir.

Si l'on connaît l'angle d'incidence θ , on peut alors écrire l'expression de la distance au nadir D_N :

$$D_N = R_T \left(\theta - A \sin \left(\frac{R_T \sin \theta}{R_T + h} \right) \right) \quad (\text{A.6})$$

L'expression A.3 peut aussi se réécrire en fonction de la distance au nadir D_N :

$$\alpha = A \tan \left(\frac{R_T \sin \left(\frac{D_N}{R_T} \right)}{R_T + h - R_T \cos \left(\frac{D_N}{R_T} \right)} \right) \quad (\text{A.7})$$

Le tableau A.1 donne quelques valeurs utilisables pour analyser les satellites RSO.

L'expression A.4 permet aussi d'exprimer par ailleurs l'angle limite de visée (qui correspond à un angle d'incidence de 90° : la visée est parfaitement rasante, comme on l'a vu sur la figure A.8) en fonction de l'altitude h

$$\alpha_{lim} = A \sin \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)$$

ce qui permet d'exprimer ϕ_{lim} :

$$\phi_{lim} = \frac{\pi}{2} - A \sin \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)$$

dont l'allure est reprise figure A.9.

Le tableau suivant donne quelques valeurs pour des altitudes usuelles en télédétection.

h	α_{lim}	$\cos \phi_{lim}$	D_{nadir}	$d_{satellite}$
400 km	$70,2^\circ$	$19,8^\circ$	2202 km	2294 km
600 km	$66,1^\circ$	$23,9^\circ$	2664 km	2831 km
800 km	$62,7^\circ$	$27,3^\circ$	3040 km	3293 km

Variation de l'incidence au sol le long de la fauchée

Pour un système radar, les paramètres les mieux connus sont liés au temps. Un système comme Terrasar-X fournit un certain nombre de métadonnées, dont certaines sont spécifiquement des données de temps. On a par exemple :

- la *range time* qui correspond à l'instant où le signal est reçu vis à vis de l'instant d'émission. On a ainsi deux valeurs essentielles :
 - la *range time* pour le premier pixel,
 - la *range time* pour le dernier pixel.
- de manière légèrement redondante, on a le *sceneRangeExtent* que l'on peut déduire des deux précédentes valeurs (connaissant la célérité de la lumière...).

Si l'on connaît la distance entre le satellite et le centre de la Terre D_S , le rayon terrestre pour le pixel considéré R_T , on va donc considérer une distance d entre le satellite et le point observé de la Terre (cette distance correspond donc au temps de vol). De manière triviale (théorème d'Al-Kashi), on a :

$$D_S^2 = R_T^2 + d^2 - 2R_T d \cos(\theta)$$

L'incidence locale pour un trajet antenne-sol $d = \frac{ct}{2}$ est alors donné par :

$$\theta = \text{Arccos}\left(\frac{R_T^2 + d^2 - D_S^2}{2R_T d}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{R_T^2 + (\frac{ct}{2})^2 - D_S^2}{2R_T(\frac{ct}{2})}\right)$$

On propose ici le calcul de l'incidence locale dans le cas de vraies données TSX (avec $D_S = 6882\text{km}$), en prenant $R_T = 6380\text{km}$ et $c = 310^8 \text{ m/s}$:

range time	distance initiale	θ
First pixel = $4,557 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	683,697 km	44,83°
Last pixel = $4,719 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	707,911 km	47,04°

Dans la réalité, le sol n'est pas à altitude nulle et il faut donc introduire le relief.

A.5.2 Pixels de l'image et position sur le géoïde terrestre

A l'heure actuelle on a donc une excellente trajectographie des satellites et une information extrêmement précise du cadencement des acquisitions (les horloges sont devenues extrêmement précises). Le vrai problème est donc de savoir à quel point sur la Terre correspond un pixel de l'image.

Un pixel est donc caractérisé par un temps de vol et une position du satellite (ainsi que la valeur de la direction de l'antenne, c'est à dire le *squint -Doppler centroid-*). Il faut alors établir l'intersection de la sphère isochrone ainsi construite avec le sol terrestre. Ceci requiert un MNT de qualité, fourni dans un géoïde spécifique et une correction des données satellites (repère géocentrique) en données liées au géoïde. C'est un problème assez redoutable car, aux précisions actuelles, la synthèse des données RSO requiert un MNT, et que cette étape de synthèse avec MNT est spécifique à chaque agence spatiale.

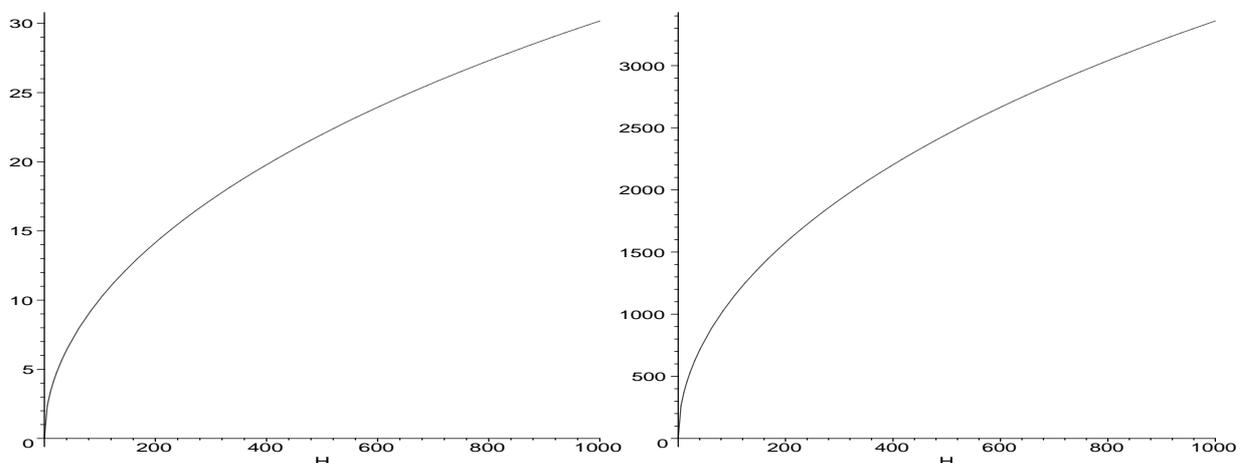


FIG. A.9 – Variation de l'angle ϕ_{lim} et de la distance au nadir correspondante avec l'altitude.

Annexe B

Caractérisation des cibles : l'approche SVA



B.1 La méthode SVA (Spatially Variant Apodisation) et les “Cosinus sur piedestal”

Parmi les fenêtres d’apodisation spectrales les plus usitées, les “cosinus sur piedestal” présentent la particularités d’être assimilables à des filtre d’ordre 3. En effet, si le spectre $\hat{S}(f)$ d’un filtre s’écrit sous la forme :

$$\hat{S}(f) = 1 + 2a \cos(2\pi f) \quad f \in [-0.5; 0.5]$$

ce filtre s’écrit dans le domaine temporel sous la forme :

$$s(t) = \delta(t) + a (\delta(t-1) + \delta(t+1))$$

avec δ distribution de Dirac.

L’expression du filtre est alors :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \end{pmatrix}$$

On retrouve donc les fenêtres les plus célèbres :

- $a = 0$: la fenêtre naturelle
- $a = 0.46$: la fenêtre de Hamming
- $a = 0.5$: la fenêtre de Hann

On se restreindra ici au cas où a est un réel, compris entre 0 et 0.5. Ce choix contraint le spectre du filtre à avoir des valeurs réelles, positives ou nulles.

B.2 SVA en 1-D

Soit un signal discret $s(t)$.

L’idée du SVA est de trouver localement la “meilleure” apodisation au sens d’un certain critère. Plutôt que de calculer tous les spectres apodisés et de choisir celui qui vérifie le critère que l’on s’est fixé, on peut demeurer dans l’espace initial et définir localement la valeur de a .

Un critère généralement choisi est celui qui minimise l’amplitude du signal filtré $v(t)$:

$$v(t) = s(t) + a (s(t-1) + s(t+1))$$

En posant

$$r(t) = (s(t-1) + s(t+1))$$

le signal filtré s’exprime donc comme :

$$v(t) = s(t) + a r(t)$$

$s(t)$ pouvant être un signal complexe, on écrira :

$$s(t) = s_R(t) + j s_I(t) \quad r(t) = r_R(t) + j r_I(t)$$

Si on cherche à minimiser l’amplitude du signal filtré, cela revient à minimiser N , le carré de la norme de ce même signal, valeur qui, après quelques calculs triviaux s’écrit :

$$\begin{aligned} N &= (s_R(t) + a r_R(t))^2 + (s_I(t) + a r_I(t))^2 \\ &= D a^2 + G a + I \end{aligned}$$

avec¹

$$\begin{aligned} D &= r_R^2 + r_I^2 \\ G &= 2(s_R r_R + s_I r_I) \\ I &= s_R^2 + s_I^2 \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport à a , on obtient la relation

$$N_a = \frac{\partial N}{\partial a} = 2D a + G$$

¹Le choix des grandeurs A à I se justifiera dans le cas général 2-D qui sera abordé au paragraphe B.3.2

ainsi que la dérivée seconde :

$$N_{aa} = \frac{\partial^2 N}{\partial a^2} = 2D \geq 0$$

Annuler la dérivée première N_a conduit à une équation du premier degré. Il est alors aisé d'en déduire la valeur de a minimisant N :

$$a_s(t) = - \frac{s_R(t) r_R(t) + s_I(t) r_I(t)}{r_R^2(t) + r_I^2(t)}$$

valeur que l'on retiendra dès lors qu'elle appartient à l'intervalle $[0; 0.5]$.

Si l'on se trouve avec une solution en dehors de cet intervalle, il faut alors remarquer que N_{aa} est positif ou nul, et que la parabole décrivant l'énergie N en fonction de a a une concavité vers les y positifs. Donc on en déduit la solution minimisant N sous la contrainte $a \in [0; 0.5]$:

- $a_s < 0$: on prendra $a_s = 0$,
- $a_s > 0.5$: on prendra $a_s = 0.5$.

Remarquons aussi que a est solution d'un système linéaire d'une équation unique : il n'y a donc qu'un degré de liberté. En effet, il se détermine sur un espace à 4 degrés de liberté que sont les valeurs de s_R, s_I, r_R, r_I , mais la solution est contrainte par les 3 propriétés suivantes :

- la modalité de filtrage est invariante par homothétie du signal (on peut remplacer s et r par Ks et Kr : ce qui revient par exemple à normaliser les signaux selon s).
- la modalité de filtrage est invariante si on rajoute une phase au signal global : seule la différence de phase entre s et r est à prendre en compte.
- le critère à optimiser est un critère sur la norme de v et se trouve donc indépendante de la phase de v .

Il ne reste donc qu'un unique degré de liberté qui fournit alors l'expression du paramètre a .

B.3 SVA 2-D

Soit un signal bidimensionnel $s(i, j)$.

Analysé sur un voisinage 3×3 , il s'exprime comme :

$$\begin{pmatrix} s(i-1, j-1) & s(i-1, j) & s(i-1, j+1) \\ s(i, j-1) & s(i, j) & s(i, j+1) \\ s(i+1, j-1) & s(i+1, j) & s(i+1, j+1) \end{pmatrix}$$

On définit rl , rc et rd par les expressions :

$$r(i, j) = (s(i-1, j) + s(i+1, j))$$

$$t(i, j) = (s(i, j-1) + s(i, j+1))$$

$$u(i, j) = (s(i-1, j-1) + s(i-1, j+1) + s(i+1, j-1) + s(i+1, j+1))$$

La définition d'un filtre 2-D pose quelques problèmes, en particulier sur le type de filtre qui peut prendre en compte des considérations de symétrie.

En effet, dans notre cas où l'on se restreint à des filtres 3×3 , il faut trouver les coefficients c_{ij} du filtre 2-D :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Soit deux filtres 1-D appartenant à la classe des cosinus sur piédestal et caractérisé par leurs coefficients respectifs a et b .

On peut avec ces filtres construire un filtre produit, qui s'exprimera comme :

$$\begin{pmatrix} ab & b & ab \\ a & 1 & a \\ ab & b & ab \end{pmatrix}$$

Si l'on force les valeurs diagonales à 0, on aura un filtre dont la symétrie est "quinconce" :

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

On peut enfin approximer un filtre circulaire grâce à un paramètre supplémentaire β tel que :

$$\begin{pmatrix} \beta ab & b & \beta ab \\ a & 1 & a \\ \beta ab & b & \beta ab \end{pmatrix}$$

On peut prendre par exemple $\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

B.3.1 SVA filtre “quinconce”

Le filtre s’écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$v(i, j) = s(i, j) + a r(i, j) + b t(i, j)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on exprime l’énergie du signal N filtré, qui s’exprime comme :

$$\begin{aligned} N(i, j) &= (s_R(i, j) + a r_R(i, j) + b t_R(i, j))^2 + (s_I(i, j) + a r_I(i, j) + b t_I(i, j))^2 \\ &= D a^2 + E b^2 + F' ab + G a + H b + I \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D &= r_R^2 + r_I^2 \\ E &= t_R^2 + t_I^2 \\ F' &= 2 (r_R t_R + r_I t_I) \\ G &= 2 (s_R r_R + s_I r_I) \\ H &= 2 (s_R t_R + s_I t_I) \\ I &= s_R^2 + s_I^2 \end{aligned}$$

Les dérivées premières et secondes de N s’écritent :

$$N_a = \frac{\partial N}{\partial a} = 2D a + F' b + G \quad (\text{B.1})$$

$$N_b = \frac{\partial N}{\partial b} = 2E b + F' a + H \quad (\text{B.2})$$

$$N_{aa} = \frac{\partial^2 N}{\partial a^2} = 2D$$

$$N_{ab} = \frac{\partial^2 N}{\partial a \partial b} = F'$$

$$N_{bb} = \frac{\partial^2 N}{\partial b^2} = 2E$$

et le déterminant du Hessien s’écrit alors

$$4DE - F'^2 = 4 (r_R t_I - r_I t_R)^2 \geq 0$$

Cette dernière relation démontre alors que si l’on a un minimum, ce sera un minimum global

La solution (a_s, b_s) , obtenu en annulant les dérivées premières en a et b de l’énergie N (relations B.1 et B.2), s’écrit alors (quand elle existe) :

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{2EG - HF'}{F^2 - 4DE} = \frac{s_R t_I - s_I t_R}{r_I t_R - r_R t_I} \\ b_s &= \frac{2DH - GF'}{F^2 - 4DE} = \frac{s_I r_R - s_R r_I}{r_I t_R - r_R t_I} \end{aligned}$$

La solution ainsi trouvée sera choisie si et seulement si $a_s \in [0, 0.5]$ et $b_s \in [0, 0.5]$. Dans le cas contraire, la solution qui sera retenue se trouve sur le périmètre du domaine $(a, b) \in [0, 0.5] \times [0, 0.5]$. Pour trouver cette solution, nous allons appliquer une méthode, certes peu élégante puisque nous sommes dans un cas très simple (Energie quadratique, déterminant du Hessien constant et positif), mais qui aura le mérite de s’appliquer dans le cas du filtre produit. Nous allons donc considérer les quatre cotés du carré représentant ce périmètre :

– Coté vertical $a = 0$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = E b^2 + H b + I$$

et la valeur de b minimisant N vérifie :

$$b_z = -\frac{H}{2E} = -\frac{s_R t_R + s_I t_I}{t_R^2 + t_I^2}$$

Puisque la valeur de b doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution b_s s'exprime :

Cas $a = 0$	
$b_z < 0$	$b_s = 0$
$b_z \in [0, 0.5]$	$b_s = -\frac{H}{2E}$
$b_z > 0.5$	$b_s = 0.5$

– Coté vertical $a = 0.5$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = \frac{D}{4} + E b^2 + \frac{F b}{2} + \frac{G}{2} + H b + I$$

et la valeur de b minimisant N vérifie :

$$b_z = -\frac{F + 2H}{4E} = -\frac{(2s_R + r_R)t_R + (2s_I + r_I)t_I}{2(t_R^2 + t_I^2)}$$

Puisque la valeur de b doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution b_s s'exprime :

Cas $a = 0.5$	
$b_z < 0$	$b_s = 0$
$b_z \in [0, 0.5]$	$b_s = -\frac{F + 2H}{4E}$
$b_z > 0.5$	$b_s = 0.5$

– Coté horizontal $b = 0$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = D a^2 + G a + I$$

et la valeur de a minimisant N vérifie :

$$a_z = -\frac{G}{2D} = -\frac{s_R r_R + s_I r_I}{r_R^2 + r_I^2}$$

Puisque la valeur de a doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution a_s s'exprime :

Cas $b = 0$	
Si $a_z < 0$	$a_s = 0$
Si $a_z \in [0, 0.5]$	$a_s = -\frac{G}{2D}$
Si $a_z > 0.5$	$a_s = 0.5$

– Coté horizontal $b = 0.5$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = D a^2 + \frac{E}{4} + \frac{F a}{2} + G a + \frac{G}{2} + I$$

et la valeur de a minimisant N vérifie :

$$a_z = -\frac{F + 2G}{4D} = -\frac{(2s_R + t_R)r_R + (2s_I + t_I)r_I}{2(t_R^2 + t_I^2)}$$

Puisque la valeur de a doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution a_s s'exprime :

Cas $b = 0.5$	
$a_z < 0$	$a_s = 0$
$a_z \in [0, 0.5]$	$a_s = -\frac{F + 2G}{4D}$
$a_z > 0.5$	$a_s = 0.5$

Cette méthode exhaustive requiert aussi de calculer le carré de la norme dans les 4 cas retenus et de conserver le couple (a_s, b_s) minimisant cette valeur.

B.3.2 SVA filtre “produit”

Ce filtre se construit donc comme dans le cas précédent à partir de deux cosinus sur piédestal de coefficients a et b selon la règle du filtre produit :

$$\begin{pmatrix} ab & b & ab \\ a & 1 & a \\ ab & b & ab \end{pmatrix}$$

Si l'on dispose d'un filtre horizontal (coefficient a) et d'un filtre vertical (coefficient b), les expressions analytiques sont assez lourdes à manipuler. La norme du signal s'écrit sous la forme d'un polynôme de deux variables chacune de degré 2 :

$$N(i, j) = A a^2 b^2 + B a^2 b + C a b^2 + D a^2 + E b^2 + F a b + G a + H b + I \quad (\text{B.3})$$

les 9 paramètres A, B, C, D, E, F, G, H et I se déduisant sans problèmes majeurs (si ce n'est une certaine complexité et une certaine lourdeur) des données initiales (parties réelles et parties imaginaires des signaux $s(i, j)$, $r(i, j)$, $t(i, j)$ et $u(i, j)$) qui représentent en fait 9 grandeurs.

$$\begin{aligned} A &= u_R^2 + u_I^2 \\ B &= 2(r_R u_R + r_I u_I) \\ C &= 2(t_R u_R + t_I u_I) \\ D &= r_R^2 + r_I^2 \\ E &= t_R^2 + t_I^2 \\ F &= 2(r_R t_R + r_I t_I + s_R u_R + s_I u_I) \\ G &= 2(s_R r_R + s_I r_I) \\ H &= 2(s_R t_R + s_I t_I) \\ I &= s_R^2 + s_I^2 \end{aligned}$$

Annuler les dérivées selon a et selon b de la norme du signal (expression B.3) permet d'obtenir sans difficultés majeures les deux relations suivantes :

$$2Aab^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + Fb + G = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$2Aa^2b + Ba^2 + 2Cab + 2Eb + Fa + H = 0 \quad (\text{B.5})$$

système qui dépend donc de 8 paramètres et dont les solutions (a, b) s'expriment comme suit :

$$a = -\frac{Cb^2 + Fb + G}{2(Ab^2 + Bb + D)} \quad (\text{B.6})$$

$$b = -\frac{Ba^2 + Fa + H}{2(Aa^2 + Ca + E)} \quad (\text{B.7})$$

En reportant la valeur de a de l'équation B.6 dans la relation B.7 on construit alors un polynôme du cinquième degré (en a ou en b). L'expression suivante donne le polynôme vérifié par b :

$$\begin{aligned} &(-8EA^2 + 2AC^2)Z^5 \\ &+ (-16EAB + 3BC^2 + 2AFC - 4HA^2)Z^4 \\ &+ (4C^2D + 4BFC - 16EDA - 8EB^2 - 8HAB)Z^3 \\ &+ (-8HDA + BF^2 - 2AFG - 4HB^2 - 16EDB + 6CFD + 2BGC)Z^2 \\ &+ (-2AG^2 - 8HDB - 8ED^2 + 4CGD + 2F^2D)Z \\ &+ 2FGD - 4HD^2 - BG^2 \end{aligned}$$

Cependant, on sait, depuis les travaux d'Evariste Galois, que l'on ne peut en connaître analytiquement les racines, sauf cas particulier. C'est ce qui a conduit les bon auteurs (voir par exemple [5]) à proposer des méthodes numériques pour en trouver les racines.

Or on montre, en regroupant astucieusement les données et en utilisant un logiciel de calcul formel (dans notre cas Maple ©) que le polynôme de degré 5 se factorise en un polynôme de degré 3 et un polynôme de degré 2. Dans ce cas, il est possible de donner explicitement les 5 solutions, qui s'expriment alors comme suit :

– b_s est l'une des deux solutions de l'équation du second degré

$$(t_R u_I - t_I u_R) X^2 + (u_I s_R - u_R s_I + r_I t_R - r_R t_I) X + s_R r_I - r_R s_I \quad (\text{B.8})$$

– b_s est l'une de des trois solutions de l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned} & (u_R^2 t_R u_I + t_R u_I^3 - t_I u_R^3 - u_I^2 t_I u_R) X^3 \\ & + (3 t_R u_I r_R u_R - 3 t_I u_R r_I u_I - 3 r_R t_I u_R^2 + 3 r_I t_R u_I^2) X^2 \\ & + (r_R s_I u_I^2 - 2 t_I u_R r_I^2 - r_I u_I r_R t_I + 2 t_R u_I r_R^2 - u_R^2 r_I s_R \\ & \quad + s_R r_R u_R u_I - u_R s_I r_I u_I + 3 t_R u_I r_I^2 - 3 t_I u_R r_R^2 + r_I u_R r_R t_R) X \\ & + s_I u_I r_I r_R + r_I^3 t_R + r_I r_R^2 t_R - u_R s_I r_I^2 - r_R^3 t_I - r_I^2 r_R t_I + s_R u_I r_R^2 - s_R r_R u_R r_I \end{aligned}$$

En utilisant alors la relation B.6, a_s s'écrit alors :

$$-\frac{(t_R u_R + t_I u_I) b_s^2 + (s_R u_R + s_I u_I + r_R t_R + r_I t_I) b_s + s_R r_R + s_I r_I}{(u_R^2 + u_I^2) b_s^2 + 2(r_R u_R + r_I u_I) b_s + r_R^2 + r_I^2}$$

Dans ces cas de figures, on peut alors exprimer l'énergie N en tirant partie des relations B.4 et B.5. En effet, en multipliant par a la première et par b la seconde, on obtient des expressions qui, retranchées à l'expression initiale de l'énergie B.3, permettent d'obtenir d'autres expressions de N . Par exemple celle-ci, qui ne fait plus intervenir que 6 valeurs liées à l'image de départ :

$$N = -Aa^2b^2 - \frac{Ba^2b}{2} - \frac{Cab^2}{2} + \frac{Ga}{2} + \frac{Hb}{2} + I \quad (\text{B.9})$$

ou celle-ci, qui ne fait plus intervenir de termes en ab :

$$N = -a^2b^2(u_R^2 + u_I^2) - a^2b(r_R u_R + r_I u_I) - ab^2(t_R u_R + u_I t_I) + a(s_R r_R + s_I r_I) + b(s_R t_R + s_I t_I) + s_R^2 + s_I^2 \quad (\text{B.10})$$

L'utilisation de la relation B.10, plus simple que l'expression initiale, permet alors, en utilisant toujours un logiciel de calcul formel, de montrer que si b est solution du polynôme de degré 2 (équation B.8), alors la valeur de l'énergie est nulle :

$$b \text{ solution du polynôme de degré 2} \Rightarrow N = 0$$

Ce résultat est assez surprenant car, puisque à la fois N et sa dérivée s'annule, alors on doit avoir une racine double. Cette piste reste à explorer et montre combien le polynôme de degré 5 décrivant l'énergie recèle de propriétés inconnues.

Le déterminant du hessien a malheureusement une expression très lourde et analytiquement inexploitable. En revanche, il est aisé à calculer dans une procédure logicielle. En effet, il s'exprime comme :

$$(2Ab^2 + 2Bb + 2D)(2Aa^2 + 2Ca + 2E) - (4Aab + 2Ba + 2Cb + F)^2$$

mais son expression complète en fonction des solutions a_s, b_s est inutilisable.

Il semble néanmoins que la solution "b solution du polynôme de degré 3" conduisent à un déterminant du Hessien négatif, donc un point selle.

La solution ainsi trouvée sera choisie si et seulement si $a_s \in [0, 0.5]$ et $b_s \in [0, 0.5]$. Dans le cas contraire, la solution qui sera retenue se trouve sur le périmètre du domaine $(a, b) \in [0, 0.5] \times [0, 0.5]$. Nous allons donc appliquer la méthode exhaustive utilisée précédemment.

– Coté vertical $a = 0$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = E b^2 + H b + I$$

et la valeur de b minimisant N vérifie :

$$b_z = -\frac{H}{2E} = -\frac{s_R t_R + s_I t_I}{t_R^2 + t_I^2}$$

Puisque la valeur de b doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution b_s s'exprime :

Cas $a = 0$	
$b_z < 0$	$b_s = 0$
$b_z \in [0, 0.5]$	$b_s = -\frac{H}{2E}$
$b_z > 0.5$	$b_s = 0.5$

– Coté vertical $a = 0.5$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = \left(\frac{A}{4} + \frac{C}{2} + E\right)b^2 + \left(\frac{B}{4} + \frac{F}{2} + H\right)b + \frac{D}{4} + \frac{G}{2} + I$$

et la valeur de b minimisant N vérifie :

$$b_z = -\frac{B + 2F + 4H}{2(A + 2C + 4E)}$$

Puisque la valeur de b doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution b_s s'exprime :

Cas $a = 0.5$	
$b_z < 0$	$b_s = 0$
$b_z \in [0, 0.5]$	$b_s = -\frac{B + 2F + 4H}{2(A + 2C + 4E)}$
$b_z > 0.5$	$b_s = 0.5$

– Coté horizontal $b = 0$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = D a^2 + G a + I$$

et la valeur de a minimisant N vérifie :

$$a_z = -\frac{G}{2D} = -\frac{s_R r_R + s_I r_I}{r_R^2 + r_I^2}$$

Puisque la valeur de a doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution a_s s'exprime :

Cas $b = 0$	
Si $a_z < 0$	$a_s = 0$
Si $a_z \in [0, 0.5]$	$a_s = -\frac{G}{2D}$
Si $a_z > 0.5$	$a_s = 0.5$

– Coté horizontal $b = 0.5$. Dans ce cas le carré de la norme s'écrit :

$$N = \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} + C\right)a^2 + \left(\frac{C}{4} + \frac{F}{2} + G\right)a + \frac{E}{4} + \frac{H}{2} + I$$

et la valeur de b minimisant N vérifie :

$$b_z = -\frac{C + 2F + 4G}{2(A + 2B + 4D)}$$

Puisque la valeur de b doit appartenir au domaine $[0, 0.5]$, la solution b_s s'exprime :

Cas $a = 0.5$	
$b_z < 0$	$b_s = 0$
$b_z \in [0, 0.5]$	$b_s = -\frac{C + 2F + 4G}{2(A + 2B + 4D)}$
$b_z > 0.5$	$b_s = 0.5$

B.3.3 Allure du paysage d'énergie

B.4 Expérimentations

Cet algorithme "exact" de SVA 2D a été testé sur une image ERS-SLC acquise sur Paris et présentant de forts diffuseurs ponctuels (probablement des grues sur le site de la bibliothèque François Mitterrand en construction), illustrés par la présence de sinus cardinaux.

Plusieurs images ont été construites à partir de cette image initiale, de telle sorte que les spectres occupent plus ou moins la totalité du domaine de Fourier (ce paramètre sera appelé "ratio spectre").

Il est alors intéressant de voir combien de pixels sont concernés par le filtrage SVA. On va donc considérer séparément les cas suivants :

- $(a = 0, b = 0)$: pixels non modifiés
- $(a = 0.5, b = 0.5)$: filtre de Hanning local
- $(a = 0.5, b = 0)$: filtrage de Hanning selon Ox, pas de filtrage selon Oy

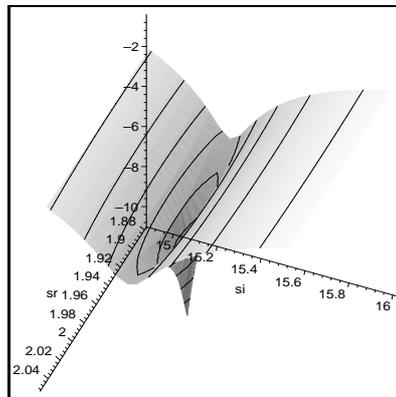


FIG. B.1 – Cas 2 : Variation de la fonction énergie (en échelle logarithmique) pour les paramètres optimaux a et b quand la valeur du pixel P_2 varie (environ 10%).

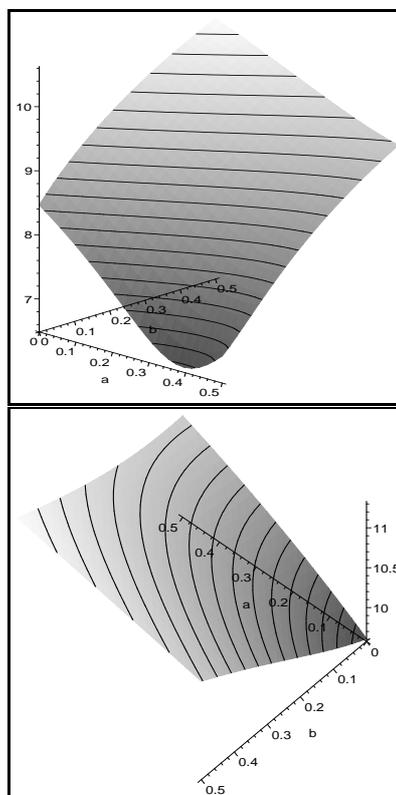


FIG. B.2 – Autres cas lorsqu'il n'existe pas de solution dans le domaine $(a, b) \in [0; 0.5] \times [0; 0.5]$.

- ($a = 0, b = 0.5$) : filtrage de Hanning selon Oy, pas de filtrage selon Ox
- $a \in]0, 0.5[$ et $b \in]0, 0.5[$: dans ce cas, considérer les cas de solution du polynôme de degré 2 et de solution du polynôme de degré 3.

Deux filtres SVA vont être testés :

- le filtre SVA décrit précédemment
- une modification de ce filtre en considérant un test de choix non pas sur l'énergie N , mais sur un terme énergétique modifié pour tenir compte d'une normalisation du filtre 3x3 :

$$N'(x, y) = \frac{N(x, y)}{\sqrt{1 + 2a^2 + 2b^2 + 4ab}}$$

Seront alors retenus les paramètres (a, b) définis par le filtre classique et qui vérifient en plus la minimisation de ce nouveau terme énergétique.

B.4.1 Filtrage SVA standard

Ratio Spectre	Pixels inchangés	Hanning	Filtrage vertical	Filtrage horizontal	Pol degré 2	Pol degré 3
1	53.18	6.77	13.74	17.68	4.98	2.09
0.95	55.80	6.19	13.28	16.68	4.62	1.88
0.91	58.27	5.66	12.53	16.03	4.22	1.73
0.87	60.81	5.29	11.98	15.20	3.67	1.49
0.83	63.28	4.82	11.14	14.51	3.42	1.28
0.80	66.29	4.23	10.39	13.28	3.09	1.08

Il est important de noter les points suivants :

- le filtre SVA est très sensible à l'emprise du spectre réel dans le domaine fréquentiel.
- le nombre de pixels inchangés dépasse la moitié des pixels de l'image
- il y a peu de solutions correspondant à la solution du polynôme de degré 3
- un nombre non négligeable de pixels seront filtrés à la valeur 0 (solution du polynôme de degré 2)

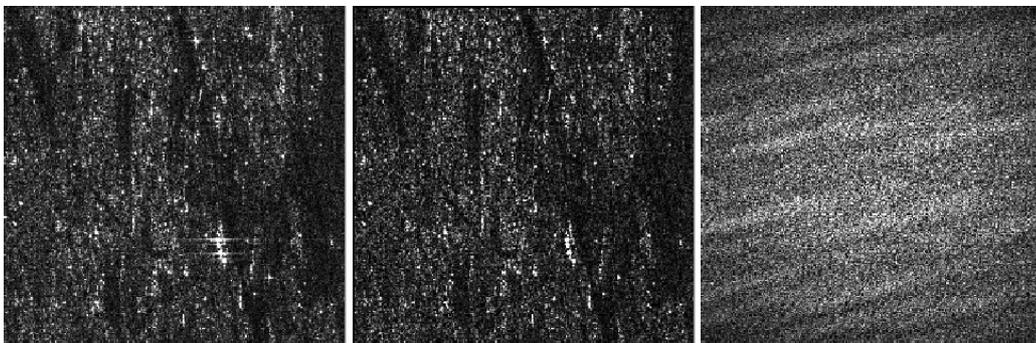


FIG. B.3 – Paris, ERS-SLC, ration de spectre utile : 1. A gauche, image initiale, au milieu, image filtrée, à droite, spectre de l'image initiale.

B.4.2 Filtrage SVA modifié

Spectre	Pixels inchangés	Hanning	Filtrage vertical	Filtrage horizontal	Pol degré 2	Pol degré 3
1	32.95	15.26	19.66	24.19	4.98	1.41
0.95	34.93	14.20	19.41	24.04	4.62	1.24
0.91	37.00	13.23	19.24	23.61	4.22	1.13
0.87	39.35	12.55	18.79	23.10	3.67	0.98
0.83	41.95	11.64	18.25	22.38	3.42	0.80
0.80	44.67	10.69	17.56	21.79	3.09	0.65

Un des effets majeurs de ce filtre modifié est d'augmenter considérablement le nombre de pixels filtrés en fait par un filtre de Hanning 2D ou par l'un des filtres de Hanning 1D (selon l'axe horizontal ou vertical). Ceci montre que la non normalisation du filtre SVA est probablement une erreur, et que le présent calcul devrait être repris dans le cas où on ajoute une normalisation des coefficients pour conserver une énergie constante au filtre.

B.5 Conclusion

La nouvelle approche analytique proposée éclaire donc d'un jour nouveau le filtrage SVA. Le fait d'avoir une solution analytique exacte permet d'analyser finement les effets de ce filtre. De plus, la mise en évidence d'un cas spécifique annulant la valeur du pixel filtré est lourde de conséquence dans la perspective d'un filtre généralisant le SVA sur un support plus long (filtre ASR : Adaptive Sidelobe Reduction) puisque l'on atteint, avec un filtre 3x3, un minimum absolu qui est donc aussi solution pour n'importe quel filtre plus long.

Par ailleurs les effets d'une troncature de spectre montre qu'il pourrait être intéressant de modifier les conditions d'admissibilité des coefficients a et b en choisissant comme valeurs seuils celles correspondant à une annulation de la fenêtre sur les bords effectifs du spectre utile.

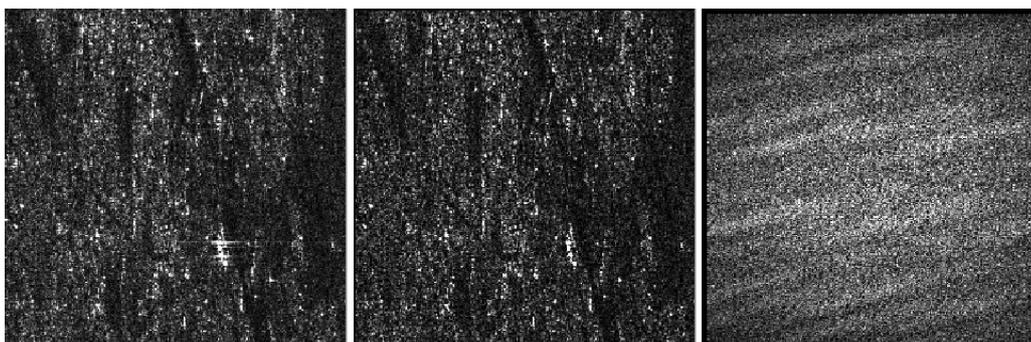


FIG. B.4 – Paris, ERS-SLC, ration de spectre utile : 0.975. A gauche, image initiale, au milieu, image filtrée, à droite, spectre de l'image initiale.

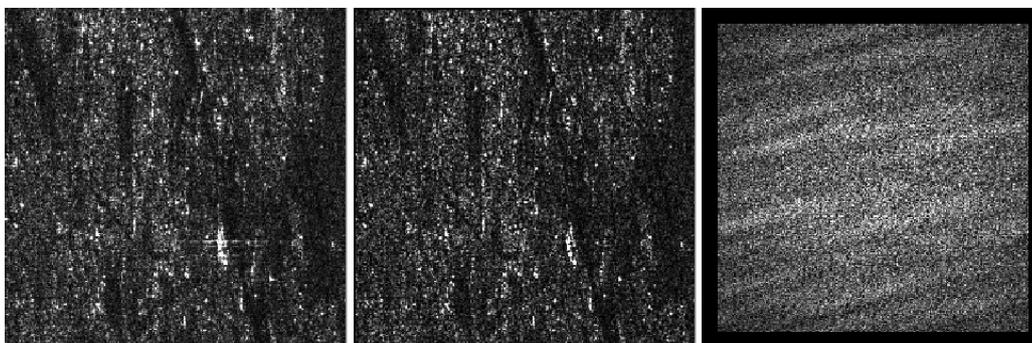


FIG. B.5 – Paris, ERS-SLC, ration de spectre utile : 0.91. A gauche, image initiale, au milieu, image filtrée, à droite, spectre de l'image initiale.

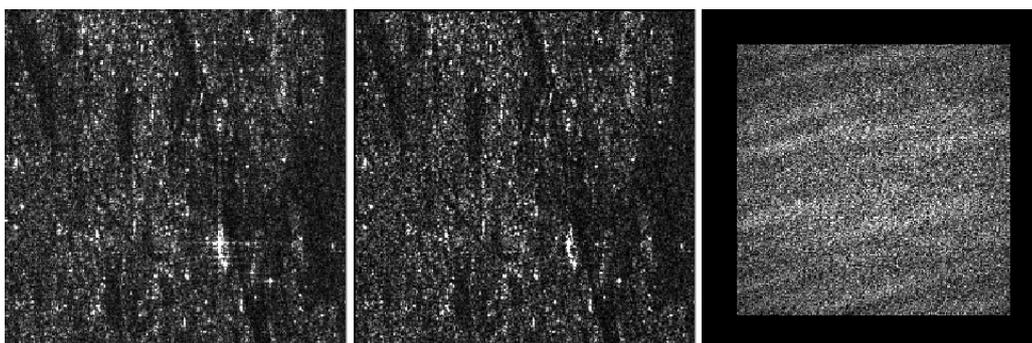


FIG. B.6 – Paris, ERS-SLC, ration de spectre utile : 0.80. A gauche, image initiale, au milieu, image filtrée, à droite, spectre de l'image initiale.

Annexe C

Les statistiques de Mellin



C.1 Introduction

C.1.1 Rappels

Dans le cadre des lois de probabilités correspondant à des données appartenant à \mathbb{R}^+ , une modélisation utile est celle des statistiques de deuxième espèce (que l'on peut appeler aussi log-statistiques) [14]. Dans ce formalisme, pour une densité de probabilité (ddp) $p_x(u)$ correspondant à la variable aléatoire x , on définit la fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_x(s)$ comme la transformée de Mellin de cette ddp :

$$\phi_x(s) = \mathcal{M}[p_x(u)](s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du \quad (\text{C.1})$$

avec s complexe. On définit de même la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce $\psi_x(s)$ comme le logarithme népérien de la première fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s)) \quad (\text{C.2})$$

On peut noter que $\phi_x(s)|_{s=1} = 1$ et que $\phi_x(s)|_{s=n+1}$ est en fait le moment d'ordre n : à ce titre, on peut interpréter la fonction caractéristique de deuxième espèce comme la fonction génératrice des moments dans la mesure où la variable s est réelle et que $\phi_x(s)|_{s=n+1}$ est défini dans un voisinage de s incluant le point $s = 1$.

S'ensuivent les définitions des moments de deuxième espèce (ou log-moments) :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1} \quad (\text{C.3})$$

et des cumulants de deuxième espèce (ou log-cumulants) :

$$\tilde{\kappa}_r = \left. \frac{d^r \psi_x(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (\text{C.4})$$

C.1.2 Lois inverses

Relations fondamentales

Toujours dans le formalisme des log-statistiques, on montre que, pour une variable aléatoire x de ddp $p_x(u)$ et de fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_x(s)$, on peut associer la variable aléatoire $y = \frac{1}{x}$, de ddp $p_y(u)$ et de fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_y(s)$. On a ainsi la définition de la loi inverse de p_x :

$$p_y(u) = p_{I,x}(u) = \frac{1}{u^2} p_x\left(\frac{1}{u}\right) \quad (\text{C.5})$$

$$\phi_y = \phi_{I,x}(s) = \phi_x(2-s) \quad (\text{C.6})$$

Il est alors aisé de montrer, à partir de la relation C.6 que les log-moments de la loi inverse vérifient

$$\tilde{m}_{I,r} = (-1)^r \tilde{m}_r \quad (\text{C.7})$$

et que les log-cumulants de la loi inverse vérifient

$$\tilde{\kappa}_{I,r} = (-1)^r \tilde{\kappa}_r \quad (\text{C.8})$$

Un cas particulier

Nous rencontrerons ultérieurement un cas particulier : celui d'une loi strictement identique à sa loi inverse¹. On a alors les propriétés suivantes :

– puisque les log moments de la loi et de la loi inverse sont identiques, la relation C.7 permet de déduire :

$$\tilde{m}_{I,2r+1} = 0 \quad \forall r > 0 \quad (\text{C.9})$$

– puisque les log cumulants de la loi et de la loi inverse sont identiques, la relation C.8 permet de déduire :

$$\tilde{\kappa}_{I,2r+1} = 0 \quad \forall r > 0 \quad (\text{C.10})$$

¹Dans cette note il faudra bien distinguer le cas où loi et loi inverse sont identiques (même loi, même paramètres) et le cas où loi et loi inverse ont la même formulation analytique (même loi, paramètres différents).

Ce type de loi a aussi une autre propriété très curieuse concernant la médiane. En effet, soit $p(x)$ une ddp telle que $p_I(x) = p(x)$. Développons l'intégrale de $p(x)$ entre 0 et l'infini (égale à 1 par définition) :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p(x)dx &= \int_0^1 p(x)dx + \int_1^{\infty} p(x)dx \\ &= \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} p\left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 p_I(x)dx \\ &= 2 \int_0^1 p(x)dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_0^1 p(x)dx = 0.5 \quad (\text{C.11})$$

ce qui signifie que la médiane a la valeur 1.

Toutes ces propriétés sont à rapprocher de celles d'une ddp $q(x)$ définie sur \mathbb{R} telle que $q(-x) = q(x)$. On montrerait aisément que ses moments impairs sont nuls, que ses cumulants impairs sont nuls et que sa médiane est en 0.

C.1.3 Convolution de Mellin, produits de variables aléatoires, rapports de variables aléatoires

Produit de variables aléatoires

Le formalisme des statistiques de deuxième espèce trouve toute son utilité dans le cadre de l'étude de produit de variable aléatoire. En effet, considérons deux variables aléatoires indépendantes x et y , de densités de probabilité p_x et p_y . Pour tout tirage X de la variable aléatoire x et pour tout tirage Y de la variable aléatoire y , on peut considérer la variable aléatoire z dont un tirage Z est défini par le produit des tirages de x et y :

$$Z = X Y$$

On peut alors écrire la densité de probabilité vérifiée par la variable aléatoire z :

$$p_z(u) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y(\beta) d\beta \quad (\text{C.12})$$

et on reconnaît dans cette expression une convolution de Mellin (notée $\hat{\star}$), ce qui permet d'établir la relation fondamentale suivante :

$$\begin{aligned} p_z(u) &= p_x(u) \hat{\star} p_y(u) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y(\beta) d\beta \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} p_x(\beta) p_y\left(\frac{u}{\beta}\right) d\beta \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Il est alors aisé de déduire directement des propriétés de la convolution de Mellin les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_z(s) &= \phi_x(s) \phi_y(s) \\ m_{z,\nu} &= m_{x,\nu} m_{y,\nu} \quad \forall \nu \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \psi_z(s) &= \psi_x(s) + \psi_y(s) \\ \tilde{\kappa}_{z(r)} &= \tilde{\kappa}_{x(r)} + \tilde{\kappa}_{y(r)} \quad \forall r \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Rapport de variables aléatoires

Pour tout tirage X de la variable aléatoire x et pour tout tirage Y de la variable aléatoire y , on peut considérer la variable aléatoire z dont un tirage Z est défini par le rapport des tirages de x et y . Si l'on considère la variable aléatoire y' inverse de la variable aléatoire y , le tirage Z est alors défini par le produit des tirages X et Y' des

variables aléatoires x et y' . En partant de la définition de la convolution de Mellin (qui est associé naturellement au produit de deux variables aléatoires), et en utilisant la relation C.5, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p_z(u) &= p_x(u) \hat{\star} p_{y'}(u) \\
 &= \int_0^\infty p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_{y'}(\beta) \frac{1}{\beta} d\beta \\
 &= \int_0^\infty p_x\left(\frac{u}{\beta}\right) p_y\left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\beta^3} d\beta \\
 &= \int_0^\infty p_x(\alpha u) p_y(\alpha) \alpha d\alpha
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

cette dernière relation se trouvant par exemple dans Papoulis [15].

A partir des propriétés des fonctions caractéristiques de deuxième espèce d'une loi inverse, on a :

$$\begin{aligned}
 \phi_z(s) &= \phi_x(s) \phi_{y'}(s) \\
 &= \phi_x(s) \phi_y(2-s) \\
 \tilde{\kappa}_{z(r)} &= \tilde{\kappa}_{x(r)} + (-1)^r \tilde{\kappa}_{y(r)} \quad \forall r
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

Convolution de Mellin et loi inverse

L'expression multiplicative des fonctions caractéristiques de deuxième espèce permet d'obtenir directement une propriété utile : la loi inverse d'une ddp exprimée par une convolution de Mellin de ddp est la convolution de Mellin des ddp inverses.

En effet, soit une ddp $p(x)$ s'exprimant par une convolution de Mellin de n ddp q_i :

$$p = q_1 \hat{\star} q_2 \hat{\star} \dots \hat{\star} q_n$$

Sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme d'un produit :

$$\phi_p(s) = \prod_i \phi_{q_i}(s)$$

La fonction caractéristique de sa loi inverse s'écrit

$$\phi_{p_I}(s) = \phi_p(2-s) = \prod_i \phi_{q_i}(2-s) = \prod_i \phi_{q_{I,i}}(s)$$

ce qui permet alors d'écrire

$$p_I = q_{I,1} \hat{\star} q_{I,2} \hat{\star} \dots \hat{\star} q_{I,n}$$

C.1.4 Lois en intensité, lois en amplitude

Passage de données en amplitude à des données en intensité

Les données fournies par un système peuvent être en amplitude (désignées ici par la variable u) ou en intensité (désignées ici par la variable v). Il est aisé de passer d'une représentation à une autre. On rappelle ici les principales propriétés de ce passage.

Soit une distribution de probabilité $p_{\mathcal{A}}(u)$ correspondant à la loi en amplitude, et soit $\phi_{\mathcal{A}}$ sa fonction caractéristique de deuxième espèce. Considérons la variable $v = u^2$ (ce qui revient à dire que $u = v^{1/2}$). Nous appellerons $p_I(v)$ la loi de probabilité en intensité, et ϕ_I la fonction caractéristique correspondante. On a alors les relations suivantes :

$$p_{\mathcal{A}}(u) = 2u p_I(u^2) \tag{C.18}$$

$$\phi_{\mathcal{A}}(s) = \phi_I\left(\frac{s+1}{2}\right) \tag{C.19}$$

Moments et log-cumulants s'en déduisent aisément :

$$\begin{aligned}
 m_{\mathcal{A},2n} &= m_{I,n}, \\
 \tilde{\kappa}_{p_{\mathcal{A}},u(r)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_I,v(r)}
 \end{aligned}$$

Convolution de Mellin et passage de données en amplitude à des données en intensité

Le caractère multiplicatif des fonctions caractéristiques de deuxième espèce permet de traiter le cas où l'on souhaite passer de données en amplitude décrites par une ddp exprimée par une convolution de Mellin à des données en intensité. En effet, soit une variable en amplitude dont la ddp, $p_{\mathcal{A}}$, s'exprime sous forme d'une convolution de Mellin de n ddp $q_{\mathcal{A},i}$:

$$p_{\mathcal{A}} = q_{\mathcal{A},1} \hat{\star} q_{\mathcal{A},2} \hat{\star} \dots \hat{\star} q_{\mathcal{A},n}$$

Sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme d'un produit :

$$\phi_{p_{\mathcal{A}}}(s) = \prod_i \phi_{q_{\mathcal{A},i}}(s)$$

Or chaque $\phi_{q_{\mathcal{A},i}}$ (loi en amplitude) peut s'exprimer en fonction de $\phi_{q_{I,i}}$ (loi en intensité) grâce à la relation C.19 :

$$\phi_{q_{\mathcal{A},i}}(s) = \phi_{q_{I,i}}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

On en déduit la relation globale de passage :

$$\phi_{p_{\mathcal{A}}}(s) = \prod_i \phi_{q_{I,i}}\left(\frac{s+1}{2}\right) = \phi_{p_I}\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

ce qui revient à écrire :

$$p_I = q_{I,1} \hat{\star} q_{I,2} \hat{\star} \dots \hat{\star} q_{I,n}$$

Cas général : loi puissance η de l'amplitude

On peut généraliser cette approche à des données obtenues en élevant l'intensité à une puissance $1/\eta$ quelconque. Si v est l'intensité, on a alors une nouvelle variable $u = v^{1/\eta}$, de ddp $p(u)$ telle que $v = u^\eta$. On a alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p(u) &= \eta u^{\eta-1} p_I(u^\eta) \\ \phi(s) &= \phi_I\left(\frac{s+\eta-1}{\eta}\right) \\ \tilde{\kappa}_{p,u}(r) &= \left(\frac{1}{\eta}\right)^r \tilde{\kappa}_{p_I,v}(r) \end{aligned}$$

On vérifie aisément qu'en prenant $\eta = 2$, on retrouve les résultats du précédent paragraphe (passage de l'amplitude à l'intensité).

C.1.5 Chatolement et loi Gamma

En imagerie cohérente, le phénomène de chatolement pleinement développé (speckle) joue un rôle prépondérant. On montre que sur une zone de texture homogène, la valeur d'un pixel peut être vu comme le tirage de la ddp caractéristique de ce phénomène. Or, pour les données en intensité, la loi suivie par le chatolement est tout simplement la loi Gamma. Cette loi est très connue et s'écrit

$$\mathcal{G}[\mu, L](u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \quad (\text{C.20})$$

Ses moments ont une formulation très simple permettant facilement d'obtenir des formulations explicites pour les deux paramètres μ et L à partir des deux premiers moments, ce qui fait que l'on a tendance à aborder le problème du chatolement en analysant les données en intensité.

Cependant, nous avons vu que, dans le formalisme des statistiques de deuxièmes espèces, il n'y a pas de différences fondamentales entre les expressions des log-cumulants : passer de données en amplitude aux données en intensité requiert donc dans ce formalisme un minimum d'effort. On pourrait traiter le chatolement sur les données en amplitude et on obtiendrait la loi de Rayleigh-Nakagami :

$$\mathcal{RN}[\mu, L](u) = \frac{2}{\mu} \frac{\sqrt{L}}{\Gamma(L)} \left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}u}{\mu}\right)^2} \quad (\text{C.21})$$

Cette loi est moins usitée que la loi Gamma : la raison en est que ses moments font intervenir la fonction de Pochhammer et, de ce fait, il n'y a pas d'expressions explicites entre les paramètres de cette loi et ses deux premiers moments. Cependant, ses log-moments ont la même forme analytique que les log-moments de la loi Gamma. Néanmoins, la majorité des auteurs préfère en rester aux données en intensité, quitte à élever au carré leurs données.

Eu égard à cette tradition du monde du Radar, ce document va d'abord traiter les données en intensité, puis généralisera les résultats pour les données en amplitude.

Notons aussi que la loi de Weibull $\mathcal{WG}[\mu, L, \eta]$:

$$\mathcal{WG}[\mu, L, \eta][\mu, L, \eta](u) = \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} u}{\mu} \right)^{\eta}}. \quad (\text{C.22})$$

correspond, pour une valeur de η donnée, la manière de traiter une puissance quelconque d'une grandeur dont on connaît l'intensité (resp. l'amplitude), celle-ci suivant une loi Gamma (resp. une loi de Nakagami). Pour ces lois, la méthode des moments s'avère totalement inefficace. La méthode des log-moments permet de retrouver sans trop de difficultés les trois paramètres μ, L et η , même si le système obtenu est implicite.

C.1.6 La boîte à outils : loi Gamma, loi Gamma Inverse et loi lognormale

Pour les données d'imagerie cohérente "en intensité", les deux distributions "standard" (à l'instar de la gaussienne pour les lois de probabilité définies sur \mathbb{R}) sont la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ et la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu', M]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\mu, L](u) &= \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \\ \mathcal{GI}[\mu', M](u) &= \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{1}{M\mu'} \left(\frac{M\mu'}{u} \right)^{M+1} e^{-\frac{M\mu'}{u}} \end{aligned}$$

Dans ce rapport, on a effectué un choix spécifique de la loi Gamma Inverse (consistant schématiquement à prendre $\mu' = 1/\mu$ pour dans les deux cas garder un terme "sans dimension" comme $\frac{u}{\mu}$ ou $\frac{\mu'}{u}$). On en déduit les fonctions caractéristiques de deuxième espèce :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{G}}(s) &= \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \\ \phi_{\mathcal{GI}}(s) &= \mu'^{1-s} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s} \Gamma(M)} \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire les log-cumulants :

	Loi Gamma	Loi Gamma Inverse
$\tilde{\kappa}_1$	$\log \mu + \Psi(L) - \log L$	$\log \mu' - \Psi(M) + \log M$
$\tilde{\kappa}_2$	$\Psi(1, L)$	$\Psi(1, M)$
$\tilde{\kappa}_n$	$\Psi(n-1, L)$	$(-1)^n \Psi(n-1, M)$

Lorsque L tend vers l'infini, on sait aussi que la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ tend vers un Dirac-Mellin :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{G}[\mu, L](u) = \delta_{\mu}^M(u) \quad (\text{C.23})$$

propriété partagée avec la loi Gamma Inverse ($\lim_{M \rightarrow \infty} \mathcal{GI}[\mu', M](u) = \delta_{\mu'}^M(u)$).

A coté de ces deux lois, la loi lognormale a des propriétés fondamentales qui peuvent être utiles dans l'étude des lois produits d'image. Son expression est donnée par la relation :

$$\mathcal{L}[\mu, \sigma](u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad u > 0 \quad (\text{C.24})$$

sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{L}}(s) = e^{\mu(s-1)} e^{\left(\sigma^2 \frac{(s-1)^2}{2}\right)} \quad (\text{C.25})$$

et ses log-cumulants sont nuls à partir de l'ordre 3 :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \mu \\ \tilde{\kappa}_2 = \sigma^2 \\ \tilde{\kappa}_n = 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

Comme pour les lois Gamma et Gamma Inverse, la loi log-normale tend vers un Dirac-Mellin lorsque σ tend vers 0.

Cette loi possède une propriété probablement unique : tous ses moments sont définis, tant les moments positifs ($s > 1$ dans l'expression C.25) que ses moments négatifs ($s < 1$ dans l'expression C.25). De plus, il est aisé de montrer que la loi inverse d'une loi lognormale $\mathcal{L}[\mu, \sigma]$ est la loi lognormale $\mathcal{L}[-\mu, \sigma]$. De même le passage de l'amplitude à une puissance quelconque de l'amplitude est une opération interne aux lois lognormales : on obtient à nouveau une loi lognormale.

En fait cette loi est bien connue du monde traditionnel des probabilités puisque, par passage de la variable u à la variable $v = \log u$, on retrouve la loi normale. Ceci fonde l'analogie entre les cumulants de la loi normale, nuls à partir de l'ordre 3 et entre les log-cumulants de la loi lognormale, nuls eux aussi à partir de l'ordre 3.

Cependant, en imagerie cohérente où le chatoisement –et donc la loi Gamma– servent de référence, la loi lognormale n'a pas a priori un rôle essentiel.

C.2 Lois statistiques de produit : données en intensité

L'imagerie RSO fait intervenir des produits de pixels provenant de deux images différentes acquises sur la même zone, par exemple dans le cadre du filtrage hermitien ou de l'interférométrie RSO.

Pour aborder ce concept de produit, nous allons nous placer dans le formalisme de la convolution de Mellin, bien adaptée à l'imagerie cohérente (radar, échographie, ...) puisque la formation du pixel s'appuie sur la notion de texture et de bruit multiplicatif (lié au chatoisement). En connaissant la loi de la texture et la loi du chatoisement, la loi suivie par les pixels de l'image est alors une convolution de Mellin de ces deux lois.

La boîte à outils de l'imagerie cohérente est donc fondée sur les lois Gamma et Gamma Inverse, et sur la convolution de Mellin. Nous allons voir qu'elle permet de construire des lois connues (comme la loi \mathcal{K} et la loi de Fisher) ; d'autres, parfois inédites, peuvent apparaître. Si cette démarche est aisée à mettre en œuvre, il n'en reste pas moins que les résultats obtenus se doivent d'être confrontés à des expérimentations avant de conclure à l'intérêt effectif en traitement d'images RSO.

C.2.1 Produit de deux lois lognormale

Puisque la fonction caractéristique de deuxième espèce d'un produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce, et en se fondant sur l'expression de la seconde fonction caractéristique de la loi lognormale (expression C.25), on obtient la fonction caractéristique de la variable aléatoire z telle que $z = xy$, x suivant la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_1, \sigma_1]$ et y suivant la loi lognormale $\mathcal{L}[\mu_2, \sigma_2]$:

$$\phi_z(s) = e^{(\mu_1 + \mu_2)(s-1)} e^{\left(\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(s-1)^2}{2}\right)}$$

On reconnaît du premier coup d'œil l'expression de la loi lognormale $\mathcal{L}\left[\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right]$. Ce résultat est bien celui que l'on aurait obtenu en passant en échelle logarithmique. Dans ce cas, l'opération de type multiplicatif (convolution de Mellin) se serait transformé en opération de type additif (convolution traditionnelle) et on sait qu'ajouter du bruit gaussien à un processus gaussien donne un résultat qui suit une loi gaussienne (ceci parce que la convolution de deux gaussiennes donne une gaussienne).

Les log-cumulants s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = \mu_1 + \mu_2 \\ \tilde{\kappa}_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \tilde{\kappa}_n = 0 \quad \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

C.2.2 Produit de deux lois Gamma : la loi \mathcal{K}

On sait ([Epstein [6])² que le produit de deux variables aléatoires suivant deux lois Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ et $\mathcal{G}[\mu_2, M]$ donne la loi \mathcal{K} . En effet, puisque la fonction caractéristique de deuxième espèce d'un produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce, on obtient la seconde fonction caractéristique correspondant au produit des deux variables aléatoires :

$$\phi_z(s) = (\mu_1\mu_2)^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+s-1)}{M^{s-1}\Gamma(M)}$$

Par transformation de Mellin Inverse (obtenue par des tables de transformation de Mellin), cette dernière expression donne directement la loi suivie par une variable aléatoire produit de deux variables aléatoires suivant deux lois Gamma :

$$\mathcal{K}[\mu = \mu_1\mu_2, L, M] = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{2LM}{\mu} \left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{M+L}{2}-1} K_{M-L} \left[2\left(\frac{LMu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (\text{C.28})$$

avec K fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Cette loi est par définition la loi \mathcal{K} .

On a directement, pour tout $r > 1$, la relation :

$$\tilde{\kappa}_{u(r)} = \Psi(r-1, L) + \Psi(r-1, M). \quad (\text{C.29})$$

Pour être exhaustif, on peut noter que la loi produit d'une loi Gamma Inverse et d'une autre loi Gamma Inverse est la loi \mathcal{KI} , loi inverse de la loi \mathcal{K} :

$$\mathcal{KI}(u) = \frac{1}{\Gamma(L+1)\Gamma(M+1)} \frac{2}{\mu} \left(\frac{LM\mu}{u}\right)^{\frac{M+L}{2}+1} K_{M-L} \left[2\left(\frac{LM\mu}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

loi fortement à queue lourde et totalement inusitée.

C.2.3 Produit d'une loi Gamma et d'une loi Gamma inverse : la loi de Fisher

Cas général

On sait ([Epstein [6]) que le produit de deux variables aléatoires, l'une suivant la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L]$ et l'autre suivant la loi Gamma inverse $\mathcal{GI}[\mu_2, M]$ donne la loi de Fisher. En effet, la fonction caractéristique de deuxième espèce d'un produit de deux variables aléatoires définies sur \mathbb{R}^+ est tout simplement le produit des deux fonctions caractéristiques de deuxième espèce, ce qui donne ici :

$$\phi_z(s) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)}$$

Par transformation de Mellin Inverse, cette dernière expression donne directement la loi suivie par le produit d'une variable aléatoire produit d'une variable aléatoire suivant la loi Gamma et d'une variable aléatoire suivant loi Gamma inverse :

$$\mathcal{F} \left[\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, L, M \right] = \frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{L\mu}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{L\mu}{M\mu}\right)^{L+M}} \quad (\text{C.30})$$

qui est par définition la loi de Fisher.

On a directement, pour tout $r > 1$, la relation :

$$\tilde{\kappa}_{u(r)} = \Psi(r-1, L) + (-1)^r \Psi(r-1, M). \quad (\text{C.31})$$

La convolution de Mellin étant commutative, on en déduit une relation fort intéressante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mu, L, M] &= \mathcal{G}[\mu, L] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M] \\ &= \mathcal{GI}[1, M] \hat{\star} \mathcal{G}[\mu, L] \\ &= \mathcal{FI} \left[\frac{1}{\mu}, M, L \right] \end{aligned}$$

où \mathcal{FI} est la loi de Fisher inverse. La loi de Fisher a donc ceci de particulier que sa formulation analytique est identique à celle de sa loi inverse (propriété qu'elle partage avec la loi log-normale par exemple).

²Pour être plus précis, Epstein a seulement démontré le cas $L = M = 1$.

Cas particulier

Dans le cas où la loi Gamma Inverse choisie est identique à l'inverse de la loi Gamma initiale, on a alors un cas particulier de la loi de Fisher :

$$\mathcal{F}_Z[L] = \mathcal{F}[\mu = 1, L, L] = \frac{\Gamma(2L)}{(\Gamma(L))^2} \frac{u^{L-1}}{(1+u)^{2L}}$$

dont les log cumulants vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_2 &= 2\Psi(1, L) \\ \tilde{\kappa}_{2n} &= 2\Psi(2n-1, L) \quad \forall n > 0 \\ \tilde{\kappa}_{2n+1} &= 0 \quad \forall n > 0\end{aligned}$$

Le mode et la médiane de cette loi sont donnés par :

$$\begin{aligned}m_{mode} &= \frac{L-1}{L+1} \\ m_{mediane} &= 1\end{aligned}$$

En particulier, comme dans le cas de la loi Gamma, pour $L = 1$ le mode est en 0.

Pour $L > 1$, cette loi ressemble d'autant plus à une loi log-normale que L est grand. En effet, la ressemblance est fondée sur l'annulation de tous les log-cumulants impairs (nuls aussi pour la loi lognormale) et sur le fait que les log-cumulants pairs $\Psi(2n-1, L)$ pour $n > 1$ sont d'autant plus petits que n et L sont grands (alors qu'ils sont nuls pour la loi lognormale).

Bibliographie

- [1] Riadh Abdelfattah. *Génération d'interférogrammes en Radar à Ouverture Synthétique : Etude de la sensibilité des paramètres d'acquisition des données*. PhD thesis, ENIT, October 2000.
- [2] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover, 1960.
- [3] S. Cloude and E. Pottier. An entropy based classification scheme for land applications of polarimetric SAR. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(1) :68–78, January 1997.
- [4] I.J. Cutrona, E.N. Leith, C.J. Palermo, and L.J. Porcello. Optical data processing and filtering systems. *IRE Transactions on Information theory*, 6(3) :386–400, juin 1960.
- [5] S.R. Degraaf. SAR imaging via modern 2-d spectral estimation methods. *IEEE Trans. On Image Processing*, 7(5) :386–400, May 1998.
- [6] B. Epstein. Some applications of the Mellin transform in statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, 19 :386–400, 1948.
- [7] D. Massonnet et J.C. Souyris. *Imaging with Synthetic Aperture Radar*. EPFL Press, 2008.
- [8] J.W. Goodman. *Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie*. Masson, 1972.
- [9] J.W. Goodman. Some fundamental properties of speckle. *J. Opt. Soc. Am.*, 66 :1145–1150, 1976.
- [10] G.Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Technip, 1990.
- [11] H.Cramér. *Mathematical methods of statistics*. Princeton University press, 1946.
- [12] H.Maître. *Traitement des images de RSO*. Hermes, 2001.
- [13] D. Massonnet and T. Rabaute. Radar interferometry : limits and potential. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 31(2) :455–464, March 1993.
- [14] J-M. Nicolas. *Application de la transformée de Mellin : étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente*. Rapport TélécomParisTech 2006D010.
- [15] A. Papoulis. *Signal analysis*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [16] J.Ph. Pérez. *Optique : géométrique, ondulatoire et polarisation*. Masson, 1991.
- [17] R.Castaing. *Thermodynamique statistique*. Masson, 1970.
- [18] H.A. Zebker, C.L. Werner, P.A. Rosen, and S. Hensley. Accuracy of topographic maps derived from ERS-1 interferometric radar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(4) :823–836, July 1994.



Cadre privé } sans modifications

Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence est limité à un usage dans un cadre exclusivement privé. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire le document pour stockage aux fins de représentation sur un terminal informatique unique,
- le droit de reproduire le document en un exemplaire, pour copie de sauvegarde ou impression papier.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation, ni aucune redistribution en tout ou partie, sous quelque forme et support que ce soit et notamment par mise en réseau, ne sont autorisées.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel, non exclusif et non transmissible. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : sitepedago@telecom-paristech.fr